Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Mathematica
Volumen 22, 1997, 165–186

# SPIEGELUNGSKOEFFIZIENT UND FREDHOLMSCHER EIGENWERT FÜR GEWISSE POLYGONE

**Stephan Werner**

Wiesenstraße 5, D-06862 Roßlau, Deutschland

**Abstract.** Die Arbeit befaßt sich mit dem Problem möglichst konformer Spiegelungen an gewissen geschlossenen Jordankurven. Diejenigen geschlossenen Jordankurven $\mathcal{C}$, für die eine quasikonforme Spiegelung, also eine $Q$-quasikonforme Abbildung der komplexen Ebene auf sich unter punktweiser Festhaltung von $\mathcal{C}$ mit einem gewissen $Q$, existiert, heißen "quasikonforme Jordankurven". Eine möglichst konforme Spiegelung ist dann eine solche mit kleinstmöglicher Dilatationsschranke $Q_{\mathcal{C}}$, welche Spiegelungskoeffizient genannt wird (bzw. die Größe $q_{\mathcal{C}} = (Q_{\mathcal{C}} - 1)/(Q_{\mathcal{C}} + 1)$). Daneben wird zu $\mathcal{C}$ auch der zugehörige Fredholmsche Eigenwert $\lambda_{\mathcal{C}}$ bzw. die Größe $\kappa_{\mathcal{C}} = 1/\lambda_{\mathcal{C}}$ betrachtet.

In der vorliegenden Arbeit findet das Problem des Spiegelungskoeffizienten für beliebige Dreiecke und allgemeiner für Kreistangentenpolygone (alle Polygonseiten berühren den gleichen Kreis) seine Lösung, indem die Vermutung $q_{\mathcal{C}} = \kappa_{\mathcal{C}} = 1 - \alpha$ bewiesen wird, wobei $\alpha\pi$ die Größe eines kleinsten der Innenwinkel des Polygons ist. Dabei ist die möglichst konforme Spiegelung nicht eindeutig.

Ferner wird gezeigt, daß für Rechtecke $\mathcal{C}$ des Seitenverhältnisses $\mu$, welches $1 \le \mu < 1{,}037$ erfüllt, noch wie beim Quadrat $q_{\mathcal{C}} = \kappa_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}$ gilt. Dagegen hat man bei $\mu > 2{,}76$ die untere Abschätzung $q_{\mathcal{C}} > \frac{1}{2}$. Zur Frage der allgemeinen Abhängigkeit des Spiegelungskoeffizienten $Q_{\mathcal{C}}(\mu)$ für Rechtecke $\mathcal{C}$ des Seitenverhältnisses $\mu \ge 1$ konnte $\frac{1}{4}\pi < Q_{\mathcal{C}}(\mu)/\mu < \pi$ bewiesen werden.

## 1. Einleitung

Diese Arbeit befaßt sich mit dem Problem möglichst konformer (= extremal quasikonformer) Spiegelungen an gewissen geschlossenen Jordankurven $\mathcal{C}$. Unter einer $Q$-quasikonformen Spiegelung an $\mathcal{C}$ wird eine orientierungsumkehrende $Q$-quasikonforme Abbildung der komplexen Ebene auf sich unter punktweiser Festhaltung von $\mathcal{C}$ verstanden. Diejenigen geschlossenen Jordankurven, für die eine quasikonforme Spiegelung existiert, heißen "Quasikreise" oder "quasikonforme Jordankurven" ([2], [5], [10]). Eine möglichst konforme Spiegelung ist dann eine solche mit kleinstmöglicher Dilatationsschranke. Diese Schranke $Q_{\mathcal{C}} \ge 1$ bzw. $q_{\mathcal{C}} = (Q_{\mathcal{C}} - 1)/(Q_{\mathcal{C}} + 1)$ heißt Spiegelungskoeffizient ([9]).

Daneben wird zu $\mathcal{C}$ auch der zugehörige Fredholmsche Eigenwert $\lambda_{\mathcal{C}}$ bzw. die Größe

$$\kappa_{\mathcal{C}} := \frac{1}{\lambda_{\mathcal{C}}}$$

1991 Mathematics Subject Classification: Primary 30C62.

betrachtet. Dabei ist $\lambda_{\mathscr{C}}$ für hinreichend glattes $\mathscr{C}$ kleinster nichttrivialer Eigenwert $> 1$ der Integralgleichung (vgl. z. B. [4], [12])

$$u(w) = \lambda_{\mathscr{C}} \int_{\mathscr{C}} K(w,t) u(t)\, ds_t$$

mit dem Neumannschen Kern

$$K(w,t) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_t} \log |w - t|$$

($n_t$ Normale in $t$, $ds_t$ Bogenelement, für nichtglattes $\mathscr{C}$ Definition von $\lambda_{\mathscr{C}}$ in [12]). Nach [1] gilt die Ungleichung

$$\kappa_{\mathscr{C}} \leq q_{\mathscr{C}}.$$

Falls $\mathscr{C}$ eine analytische Ecke mit dem Innenwinkel $\pi\alpha$ enthält, so hat man nach [7] die Eckenbedingung

$$q_{\mathscr{C}} \geq \kappa_{\mathscr{C}} \geq |1 - \alpha|.$$

Für konvexe Polygone folgt daraus die Abschätzung

(1) $$q_{\mathscr{C}} \geq \kappa_{\mathscr{C}} \geq \max\{1 - \alpha : \exists \text{ Ecke von } \mathscr{C} \text{ mit Innenwinkel } \alpha\pi\}.$$

In dieser Arbeit wird nun das bisher nur für Spezialfälle ([8], [9]) betrachtete Problem des Spiegelungskoeffizienten für beliebige Dreiecke und allgemeiner für Kreistangentenpolygone (alle Polygonseiten berühren den gleichen Kreis) gelöst.

**Satz 1.** *Es sei $\mathscr{C}$ ein Kreistangentenpolygon und $\alpha\pi$ die Größe eines kleinsten seiner Innenwinkel. Dann gilt*

$$q_{\mathscr{C}} = 1 - \alpha \qquad \text{bzw.} \qquad Q_{\mathscr{C}} = \frac{2}{\alpha} - 1,$$

*also* (1) *mit dem Gleichheitszeichen.*

Es stellt sich nebenbei heraus, daß die möglichst konforme Spiegelung hierbei nicht eindeutig bestimmt ist.

Ferner wird das allgemeine Rechteck untersucht. Nach [9] herrscht für "quadratnahe" Rechteckslinien $\mathscr{C}$ noch wie beim Quadrat in (1) Gleichheit, d. h. es gilt

$$q_{\mathscr{C}} = \kappa_{\mathscr{C}} = \tfrac{1}{2},$$

nach [8] für "quadratferne" Rechteckslinien mit einem Seitenverhältnis $\mu > 3{,}31$ jedoch

$$\kappa_{\mathscr{C}} > \tfrac{1}{2}.$$

Eine konkrete möglichst konforme Spiegelung liefert der Beweis von

**Satz 2.** *Für Rechtecke* $\mathscr{C}$ *des Seitenverhältnisses* $\mu$, *welches*

$$1 \leq \mu < 1{,}037$$

*erfüllt, gilt* $q_{\mathscr{C}} = \kappa_{\mathscr{C}} = \frac{1}{2}$.

Außerdem wird die obige Schranke für quadratferne Rechtecke verbessert durch

**Satz 3.** *Bei Rechtecken* $\mathscr{C}$ *mit*

$$\mu > 2{,}76$$

*gilt die Abschätzung*

$$q_{\mathscr{C}} > \tfrac{1}{2}.$$

Zwar bleibt auch hier die schon in [9, S. 105] gestellte Frage nach der Monotonie von $Q_{\mathscr{C}}$ als Funktion von $\mu$ offen, doch können wir immerhin folgenden Satz beweisen.

**Satz 4.** *Der Spiegelungskoeffizient* $Q_{\mathscr{C}}(\mu)$ *für Rechtecke* $\mathscr{C}$ *des Seitenverhältnisses* $\mu \geq 1$ *erfüllt*

$$\frac{\pi}{4} < \frac{Q_{\mathscr{C}}(\mu)}{\mu} < \pi,$$

*d. h.* $Q_{\mathscr{C}}(\mu) = O(\mu)$ *für* $\mu \to \infty$.

## 2. Beweis von Satz 1

Der Beweis erfolgt durch Konstruktion einer quasikonformen Spiegelung, für die als kleinste Dilatationsschranke $Q_{\mathscr{C}} = (2/\alpha) - 1$ nachgewiesen wird. Zusammen mit der Eckenbedingung $Q_{\mathscr{C}} \geq (2/\alpha) - 1$ (bzw. $q_{\mathscr{C}} \geq 1 - \alpha$) folgt dann die Behauptung.

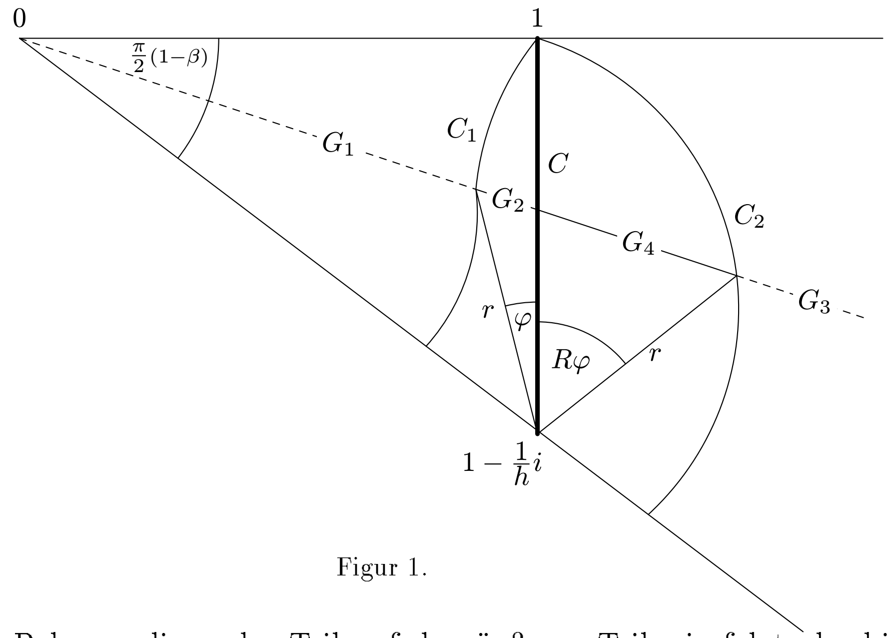
Zur Beschreibung der konkreten Abbildung entspreche der Mittelpunkt des die Polygonseiten berührenden Kreises dem Ursprung der Zahlenebene, der Fußpunkt des Lotes von diesem auf eine der Seiten dem Punkt 1 und einer der Endpunkte der betreffenden Polygonseite dem Punkt $1-(1/h)i$ (vgl. zum Folgenden Figur 1). Die Größe des Polygoninnenwinkels an diesem Eckpunkt sei $\beta\pi$ $(0 < \alpha \leq \beta < 1)$, so daß

$$h = \tan\frac{\beta\pi}{2}$$

ist. Ferner sei

$$R := \frac{2}{\beta} - 1$$

gesetzt. Durch die beiden Strahlen vom Kreismittelpunkt senkrecht zur Polygonseite bzw. durch den Eckpunkt wird ein spitzer Winkelraum begrenzt, dessen




Figur 1.

innerhalb des Polygons liegender Teil auf den äußeren Teil wie folgt abgebildet wird. Für die anderen derartigen Winkelräume erfolgt die Spiegelung analog.

Die Kurven $\mathscr{C}_1$ und $\mathscr{C}_2$ mit den Parameterdarstellungen

$$z_1 = 1 - \frac{1}{h}i + r(\varphi)e^{i((\pi/2)+\varphi)}, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\beta\pi}{2}, \tag{2}$$

$$z_2 = 1 - \frac{1}{h}i + r(\varphi)e^{i((\pi/2)-R\varphi)}, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\beta\pi}{2} \tag{3}$$

mit

$$r = r(\varphi) = \frac{\sin\varphi + \sin R\varphi + h(\cos R\varphi - \cos\varphi)}{h\sin(R+1)\varphi} \tag{4}$$

teilen den Winkelraum in die Teilgebiete $\mathscr{G}_1$ bis $\mathscr{G}_4$. Dabei sind bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{1}{2}\beta\pi$ für $r$ natürlich die leicht ermittelbaren Grenzwerte zu nehmen. Daß jeder von 0 ausgehende und im Winkelraum verlaufende Strahl jede der Kurven $\mathscr{C}_1$ und $\mathscr{C}_2$ genau einmal schneidet, wird später bewiesen werden.

Ein Punkt $z$ aus $\mathscr{G}_2$ hat nun als Bild genau jenen Punkt $w$ des Gebietes $\mathscr{G}_4$, für den gilt

$$\left|w - \left(1 - \frac{1}{h}i\right)\right| = \left|z - \left(1 - \frac{1}{h}i\right)\right|, \tag{5}$$

$$\arg\left(w - \left(1 - \frac{1}{h}i\right)\right) - \frac{\pi}{2} = -R\left(\arg\left(z - \left(1 - \frac{1}{h}i\right)\right) - \frac{\pi}{2}\right), \tag{6}$$

wobei unter dem Argument jeweils der zwischen $-\pi$ und $\pi$ gelegene Hauptwert zu verstehen ist. Dadurch wird $\mathscr{G}_2$ schlicht auf $\mathscr{G}_4$ abgebildet.

Für die Definition der Abbildung von $\mathscr{G}_1$ auf $\mathscr{G}_3$ seien $z$ ein beliebiger Punkt aus $\mathscr{G}_1$ und $z_1$ bzw. $z_2$ die Schnittpunkte des Strahles von 0 durch $z$ mit $\mathscr{C}_1$ bzw. $\mathscr{C}_2$, es gilt also

$$\arg z = \arg z_1 = \arg z_2.$$

Ferner werde definiert

$$Q := \frac{2}{\alpha} - 1, \tag{7}$$

$$a := \frac{Q + \frac{1}{4}\pi(Q-1)\tan\frac{1}{2}\alpha\pi}{1 + \frac{1}{4}\pi(Q-1)\tan\frac{1}{2}\alpha\pi}. \tag{8}$$

Das Bild $w$ von $z$ in $\mathscr{G}_3$ ist dann bestimmt durch

$$\arg w = \arg z, \qquad |w/z_2| = |z_1/z|^a. \tag{9}$$

Schließlich setze man die in $\mathscr{G}_1$ und $\mathscr{G}_2$ so festgelegte Abbildung noch stetig auf die Ränder fort. Dem Punkt $z = 0$ entspricht dabei sinngemäß $w = \infty$.

Die Stetigkeit der angegebenen Abbildungen im Innern der Gebiete $\mathscr{G}_1$ und $\mathscr{G}_2$ sowie das punktweise Festbleiben des Polygons (also hier der Strecke mit den Endpunkten 1 und $1-(1/h)i$) ergibt sich aus (5), (6) und (9) oder noch einfacher nach Übergang zu den Logarithmus-Ebenen (siehe später). Entlang der Strecke zwischen 0 und $1-(1/h)i$ folgt die Stetigkeit aus der Symmetrie des betrachteten und des sich an diesen Schenkel anschließenden Winkelraumes. Für die Stetigkeit entlang der Strecke $0 \le z \le 1$ beachte man, daß für diese $z$ in (9) $z_1 = z_2 = 1$ zu nehmen ist und nach (8) $a$ nur von $\alpha$, aber nicht von $\beta$ abhängt. Es ergibt sich also für den an dieser Seite benachbarten Winkelraum auf dem gemeinsamen Schenkel die gleiche Abbildung. Schließlich bleibt die Stetigkeit auf $\mathscr{C}_1$ zu zeigen. Dazu ist zu verifizieren, daß für die Punkte dieser Kurve bei Zugrundelegung der Abbildung von $\mathscr{G}_1$ auf $\mathscr{G}_3$ einerseits und von $\mathscr{G}_2$ auf $\mathscr{G}_4$ andererseits das gleiche Bild auf $\mathscr{C}_2$ entsteht, was man aber mittels (4) direkt nachrechnen kann.

Im nächsten Schritt wird die Dilatation im Gebiet $\mathscr{G}_2$ ermittelt. Wegen der Invarianz der Problemstellung gegenüber vor- oder nachgeschalteten schlichten konformen Abbildungen kann man von der $z$- bzw. $w$-Ebene durch

$$Z = X + iY = \log\Big(z - \Big(1 - \frac{1}{h}i\Big)\Big) - \frac{\pi}{2}i, \qquad W = U + iV = \log\Big(w - \Big(1 - \frac{1}{h}i\Big)\Big) - \frac{\pi}{2}i$$

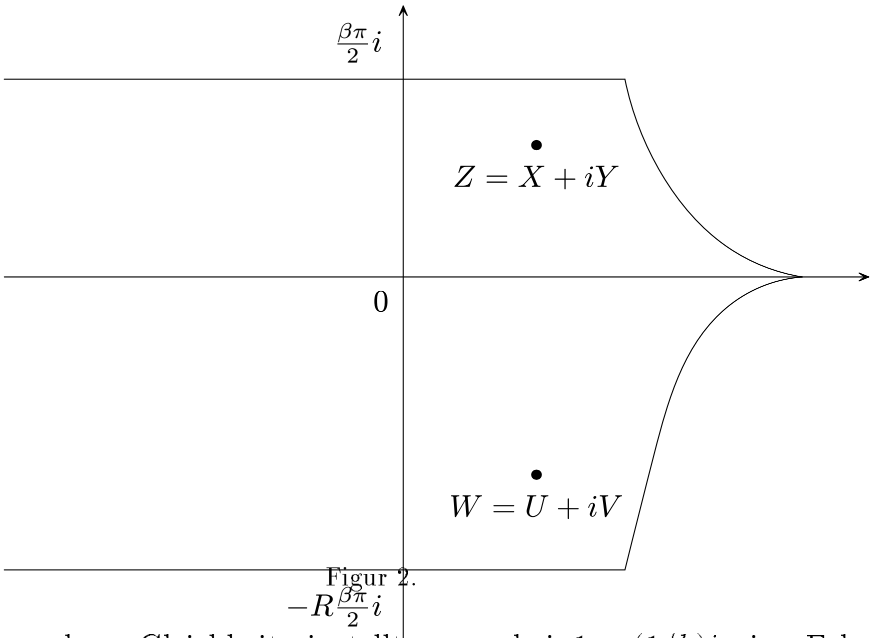
entsprechend Figur 2 zu einer $Z$- bzw. $W$-Ebene übergehen (dabei sei unter log der Hauptwert des Logarithmus verstanden).

Aus den Bestimmungsgleichungen (5) und (6) entstehen einfach

$$U = X, \qquad V = -RY,$$

womit sich als Dilatation $p$ einheitlich $R$ ergibt. Wegen $\beta \ge \alpha$ gilt folglich

$$p \le \frac{2}{\alpha} - 1, \tag{11}$$




Figur 2.

wobei sich genau dann Gleichheit einstellt, wenn bei $1-(1/h)i$ eine Ecke mit kleinstem Innenwinkel des Polygons vorliegt.

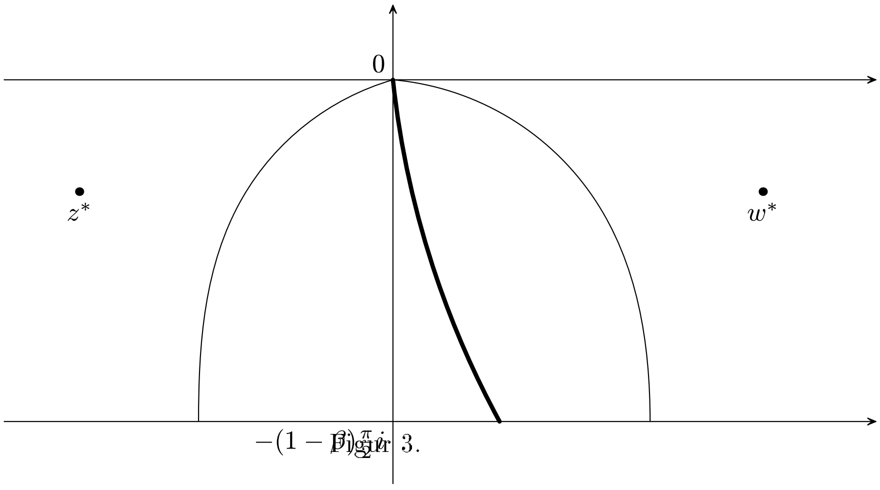
Zur Untersuchung der Dilatation im Gebiet $\mathscr{G}_1$ wird die durch

$$z^* = x + iy = \log z, \qquad w^* = u + iv = \log w$$

entstehende $z^*$- bzw. $w^*$-Ebene betrachtet (vgl. Figur 3). (9) geht über in

$$v = y, \qquad u - u_1 = a(x_1 - x), \tag{12}$$

wobei $x_1 = x_1(y)$ und $u_1 = u_1(y) = u_1(v)$ die $\mathscr{C}_1$ und $\mathscr{C}_2$ entsprechenden Kurven sind. Diese Kurvendarstellung ist natürlich nur dann möglich, wenn $x_1$ und $u_1$ eindeutige Funktionen von $y$ sind, was bedeutet, daß in der $z$- bzw. $w$-Ebene jeder Strahl von 0 aus (im vorliegenden Winkelraum) jede der Kurven $\mathscr{C}_1$ und $\mathscr{C}_2$ genau einmal trifft.




Figur 3.

An späterer Stelle wird die Behauptung

$$|u_y| \leq \tfrac{1}{2}\pi(a-1) \qquad \text{für } -\infty < x < x_1(y), \qquad -(1-\beta)\tfrac{1}{2}\pi < y < 0 \tag{13}$$

gezeigt werden. Mit den aus (12) folgenden partiellen Ableitungen ergibt sich daraus für die Dilatation $p = p(x, y)$

$$p + \frac{1}{p} = \frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{-(u_x v_y - u_y v_x)} \leq \frac{a^2 + 1 + \frac{1}{4}\pi^2(a-1)^2}{a}. \tag{14}$$

Zum Nachweis von

$$p \leq \frac{2}{\alpha} - 1 = Q \tag{15}$$

genügt also die Verifikation von

$$\frac{a^2 + 1 + \frac{1}{4}\pi^2(a-1)^2}{a} \leq Q + \frac{1}{Q}, \tag{16}$$

was sich äquivalent umformen läßt in

$$\pi Q \leq (Q-1)(Q+1)\tan\tfrac{1}{2}\alpha\pi + \tfrac{1}{4}\pi(Q-1)^2\tan^2\tfrac{1}{2}\alpha\pi. \tag{17}$$

Eine nähere Untersuchung des Ausdrucks $\big((2/\alpha)-2\big)\tan\frac{1}{2}\alpha\pi$ zeigt die Richtigkeit der Ungleichung

$$(Q-1)\tan\frac{\alpha\pi}{2} > \frac{4}{\pi} \qquad \text{für } 0 < \alpha < 1, \tag{18}$$

womit für (17)

$$\pi Q \leq \big((Q-1)(Q+1) + (Q-1)\big)\tan\tfrac{1}{2}\alpha\pi$$

oder äquivalent dazu

$$\frac{\alpha\pi}{2} - \arctan\frac{\pi Q}{(Q-1)(Q+2)} \geq 0$$

hinreichend ist. Mit $t := \frac{1}{2}\alpha\pi$ ist dies gleichbedeutend mit

$$t - \arctan\frac{\pi t(\pi - t)}{(\pi - 2t)(\pi + t)} \geq 0 \qquad \text{für } 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Eine Diskussion der linken Seite und deren Ableitung nach $t$ zeigt die Gültigkeit der letzten Ungleichung. Damit ist also (15) bewiesen, sofern noch (13) nachgewiesen werden kann.

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen wird das in (4) definierte $r = r(\varphi)$ als Funktion von

$$\gamma := \tfrac{1}{2}\beta\pi - \varphi$$

dargestellt. Man erhält

$$r = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\beta\pi}\,\frac{\sin R\gamma - \sin\gamma}{\sin(R+1)\gamma}. \tag{19}$$

Wegen $0 \le \gamma \le R\gamma \le \pi - \gamma$ in $0 \le \gamma \le \frac{1}{2}\beta\pi$ gilt in diesem Intervall

$$\sin R\gamma - \sin\gamma \ge 0, \qquad \sin(R+1)\gamma \ge 0, \tag{20}$$

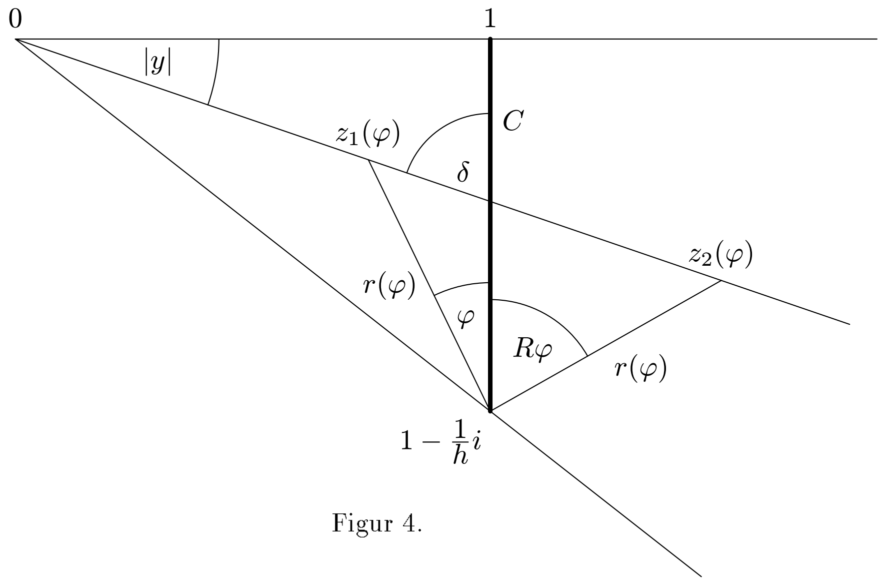
womit aus (19) $r > 0$ folgt, was die bisher angestellten Überlegungen (angefangen mit der Definition der Spiegelung) erst korrekt macht. Ferner liefern eine leichte Rechnung

$$\frac{dr}{d\gamma} = -\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\beta\pi}\,\frac{1+\cos(R+1)\gamma}{\sin^2(R+1)\gamma}(R\sin\gamma - \sin R\gamma) \tag{22}$$

und einfache Eigenschaften der Sinusfunktion

$$R\sin\gamma - \sin R\gamma \ge 0. \tag{23}$$

Ziel ist nun ein Ausdruck für $u_y$, der nur noch von $R$, $a$ und $\gamma$ abhängt. Durch $\varphi \mapsto z_1$ gemäß (2) mit (4) und $z_1 \mapsto y = \arg z_1 = \operatorname{Im}\log z_1$ wird eine eindeutige Funktion $y = y(\varphi)$ in $0 \le \varphi \le \frac{1}{2}\beta\pi$ definiert.




Figur 4.

Für den Winkel $\delta$ gilt einerseits

$$\delta = \tfrac{1}{2}\pi - |y|$$

und andererseits wegen der Gleichschenkligkeit des aus $z_1$, $z_2$ und $1-(1/h)i$ gebildeten Dreiecks

$$\delta = \varphi + \tfrac{1}{2}\bigl(\pi - (R+1)\varphi\bigr).$$

Damit folgt

$$y = -|y| = -\tfrac{1}{2}(R-1)\varphi. \tag{24}$$

Aus (24) ist wegen $R > 1$ ersichtlich, daß auch jedem $y$ genau ein $\varphi$ entspricht, womit endlich die schon benutzte Behauptung bewiesen ist, daß $\mathscr{C}_1$ von jedem Strahl von 0 aus (im gegebenen Winkelraum) genau einmal geschnitten wird. Für $\mathscr{C}_2$ folgt die entsprechende Tatsache aus der umkehrbaren Eindeutigkeit der Zuordnung $z_2 \mapsto \varphi \mapsto z_1 \mapsto y$. (12) und (24) liefern

$$u_y = -\frac{2}{R-1}\Bigl(\frac{du_1}{d\varphi} + a\frac{dx_1}{d\varphi}\Bigr) \tag{25}$$

mit $x_1 = \operatorname{Re}\log z_1(\varphi)$ und $u_1 = \operatorname{Re}\log z_2(\varphi)$. Aus elementargeometrischen Überlegungen erhält man

$$|z_1||z_2| = 1 + \frac{1}{h^2} - r^2,$$

also

$$x_1 + u_1 = \log\Bigl(1 + \frac{1}{h^2} - r^2\Bigr).$$

Für (25) ist folglich schreibbar

$$u_y = -\frac{2}{R-1}\Bigl((a-1)\frac{dx_1}{d\varphi} + \frac{d}{d\varphi}\log\Bigl(1+\frac{1}{h^2}-r^2\Bigr)\Bigr).$$

Rechnet man mittels

$$x_1 = \log|z_1| = \frac{1}{2}\log\Bigl((1-r\sin\varphi)^2 + \Bigl(-\frac{1}{h} + r\cos\varphi\Bigr)^2\Bigr)$$

unter Benutzung von (19) und (22) die auftretenden Ableitungen explizit aus, so ergibt sich nach längeren Umformungen die gewünschte Darstellung

$$\begin{aligned} u_y = &-\frac{(a-1)\bigl(-2\sin R\gamma + (R+1)\sin\gamma + (R-1)\sin\gamma\cos(R+1)\gamma\bigr)}{(R-1)\sin\gamma\sin(R+1)\gamma} \\ &-\frac{2(R\sin\gamma - \sin R\gamma)(\sin R\gamma - \sin\gamma)}{(R-1)\sin\gamma\sin R\gamma\sin(R+1)\gamma}. \end{aligned} \tag{26}$$

Dabei sind natürlich bei $\gamma = 0$ und $\gamma = \frac{1}{2}\beta\pi$ die jeweiligen Grenzwerte zu nehmen. Mit (26) kann zum Beweis der Ungleichung (13) übergegangen werden, die jetzt die Gestalt

$$\begin{aligned} &\big|(a-1)\sin R\gamma\big(-2\sin R\gamma + (R+1)\sin\gamma + (R-1)\sin\gamma\cos(R+1)\gamma\big) \\ &\qquad + 2(R\sin\gamma - \sin R\gamma)(\sin R\gamma - \sin\gamma)\big| \\ &\qquad\le \tfrac{1}{2}\pi(a-1)(R-1)\sin\gamma\sin R\gamma\sin(R+1)\gamma \quad \text{für } 0 \le \gamma \le \tfrac{1}{2}\beta\pi \end{aligned} \tag{27}$$

bekommt. Statt (27) bei festem $a$ für alle in Frage kommenden $R$ und $\gamma$ zu zeigen, soll der Beweis bei festem $R > 1$, also konstantem $\beta$, für alle dann möglichen $a$ und $\gamma$ erbracht werden. Aus (8) unter Berücksichtigung von (7) folgt zunächst, daß $a$ eine streng monoton fallende Funktion von $\alpha$ ist. Wegen $0 < \alpha \le \beta$ genügt daher der Nachweis von (27) für

$$a \ge \frac{R + \frac{1}{4}\pi(R-1)h}{1 + \frac{1}{4}\pi(R-1)h}. \tag{28}$$

(Die rechte Seite von (28) entsteht aus derjenigen von (8) für $\beta = \alpha$.) Da sowohl der Ausdruck zwischen den Betragsstrichen auf der linken als auch die rechte Seite von (27) linear von $a$ abhängen, gilt die Ungleichung genau dann für alle $a$ gemäß (28), wenn

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\pi(R-1)\sin\gamma\sin(R+1)\gamma &\le -2\sin R\gamma \\ &\quad + (R+1)\sin\gamma + (R-1)\sin\gamma\cos(R+1)\gamma \\ &\le \tfrac{1}{2}\pi(R-1)\sin\gamma\sin(R+1)\gamma \quad \text{für } 0 \le \gamma \le \tfrac{1}{2}\beta\pi \end{aligned} \tag{29}$$

und die bei Ersetzung von $a$ durch die rechte Seite von (28) aus (27) entstehende Relation

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\pi(R-1)^2\sin\gamma\sin R\gamma\sin(R+1)\gamma &\le (R-1)\sin R\gamma\big(-2\sin R\gamma \\ &\quad + (R+1)\sin\gamma + (R-1)\sin\gamma\cos(R+1)\gamma\big) \\ &\quad + 2\big(1 + \tfrac{1}{4}\pi(R-1)h\big)(R\sin\gamma - \sin R\gamma)(\sin R\gamma - \sin\gamma) \\ &\le \tfrac{1}{2}\pi(R-1)^2\sin\gamma\sin R\gamma\sin(R+1)\gamma \quad \text{für } 0 \le \gamma \le \tfrac{1}{2}\beta\pi \end{aligned} \tag{30}$$

gültig sind. Für $\gamma = 0$ und $\gamma = \frac{1}{2}\beta\pi$ sind (29) und (30) wegen $(R+1)\frac{1}{2}\beta\pi = \pi$ und $\sin R\frac{1}{2}\beta\pi = \sin\frac{1}{2}\beta\pi$ mit Gleichheit erfüllt. Zu zeigen bleiben also die insgesamt vier Ungleichungen für $0 < \gamma < \frac{1}{2}\beta\pi$.

Beweis der zweiten Ungleichung in (29):

Aus

$$\tfrac{1}{2}R + 1\tan\gamma < \tan\tfrac{1}{2}R + 1\gamma \qquad \text{für } 0 < \gamma < \tfrac{1}{2}\beta\pi \tag{31}$$

folgt zunächst

$$(R+1)\sin\gamma\bigl(1+\cos(R+1)\gamma\bigr) < 2\cos\gamma\sin(R+1)\gamma,$$

und mit

$$\sin R\gamma = \cos\gamma\sin(R+1)\gamma - \sin\gamma\cos(R+1)\gamma \tag{32}$$

ergibt sich hieraus

$$-2\sin R\gamma + (R+1)\sin\gamma + (R-1)\sin\gamma\cos(R+1)\gamma < 0,$$

also erst recht die zweite Relation in (29).

Beweis der ersten Ungleichung in (29):

Wird $\sin R\gamma$ mittels (32) ersetzt, so kann man die Behauptung leicht in die Form

$$\bigl(\cot\gamma - \tfrac{1}{4}\pi(R-1)\bigr)\tan\tfrac{1}{2}R+1\gamma \le \tfrac{1}{2}R+1 \tag{33}$$

bringen. Für $\gamma \to +0$ geht dies in eine Gleichheit über. (33) ist demnach sicher dann erfüllt, wenn die Ableitung der linken Seite in $0 \le \gamma \le \frac{1}{2}\beta\pi$ nicht größer als 0 ist, das heißt

$$-\frac{1}{\sin^2\gamma}\tan\frac{R+1}{2}\gamma + \frac{R+1}{2}\Bigl(\cot\gamma - \frac{\pi}{4}(R-1)\Bigr)\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}(R+1)\gamma} \le 0$$

oder

$$G(\gamma) := -\sin(R+1)\gamma + \tfrac{1}{2}R+1\bigl(\sin 2\gamma - \tfrac{1}{2}\pi(R-1)\sin^2\gamma\bigr) \le 0. \tag{34}$$

Wenn nun $G$ eine Nullstelle $\gamma_1$ in $0 < \gamma_1 < \frac{1}{2}\beta\pi$ hätte, so folgte nach einigen Umformungen

$$2\cos^2\gamma_1 - \frac{\pi}{2}(R-1)\sin\gamma_1\cos\gamma_1 = \frac{2\sin(R+1)\gamma_1}{(R+1)\tan\gamma_1},$$

daraus

$$\begin{aligned} G'(\gamma_1) &= (R+1)\bigl(-\cos(R+1)\gamma_1 + \cos 2\gamma_1 - \tfrac{1}{2}\pi(R-1)\sin\gamma_1\cos\gamma_1\bigr) \\ &= \frac{(R+1)\bigl(1+\cos(R+1)\gamma_1\bigr)}{\tan\gamma_1}\Bigl(-\tan\gamma_1 + \frac{2}{R+1}\tan\frac{R+1}{2}\gamma_1\Bigr) \end{aligned}$$

und damit wegen (31)

$$G'(\gamma_1) > 0. \tag{35}$$

Da (18) gültig bleibt, wenn $\alpha$ durch $\beta$ ersetzt wird, erhält man

$$G\bigl(\tfrac{1}{2}\beta\pi\bigr) = \tfrac{1}{2}(R+1)\sin\beta\pi\bigl(1 - \tfrac{1}{4}\pi(R-1)\tan\tfrac{1}{2}\beta\pi\bigr) < 0. \tag{36}$$

Aus Stetigkeitsgründen kann also nicht für jede Nullstelle $\gamma_1$ in $0 < \gamma_1 < \frac{1}{2}\beta\pi$ (35) gelten, so daß die Annahme falsch war. Mithin hat $G$ in $0 < \gamma < \frac{1}{2}\beta\pi$ einheitliches Vorzeichen, nämlich nach (36) das negative, womit (34), also (33) bewiesen ist.

Beweis der ersten Ungleichung in (30):

Die Behauptung folgt sofort aus der ersten Ungleichung (29) und der Nichtnegativität (nach (20) und (23)) von $(R\sin\gamma - \sin R\gamma)(\sin R\gamma - \sin\gamma)$.

Beweis der zweiten Ungleichung in (30):

Zur Abkürzung werden für $0 < \gamma < \frac{1}{2}\beta\pi$ eingeführt:

$$L = L(\gamma) := \frac{\tan\frac{1}{2}(R+1)\gamma}{\tan\gamma},$$
$$k = k(\gamma) := \frac{\sin R\gamma}{\sin\gamma}$$

Mit diesen Bezeichnungen ist der zweite Teil von (30) äquivalent zu

$$(R-1)\bigl(-2k + (R+1) + (R-1)\cos(R+1)\gamma\bigr) + 2\bigl(1 + \tfrac{1}{4}\pi(R-1)h\bigr)\frac{(R-k)(k-1)}{k} \le \tfrac{1}{2}\pi(R-1)^2\sin(R+1)\gamma.$$

Der Beweis ist also erbracht, wenn

$$(R-1)\bigl(-2k + (R+1) + (R-1)\cos(R+1)\gamma\bigr) + 2\frac{(R-k)(k-1)}{k} \le 0 \tag{37}$$

und

$$\frac{(R-k)(k-1)}{k\sin(R+1)\gamma} \le \frac{R-1}{h} \tag{38}$$

gezeigt werden können.

Zur Verifikation von (37) wird von (23), das heißt

$$R \ge k \tag{39}$$

ausgegangen, woraus

$$\tfrac{1}{2}R + 1(2L + 2L\tan^2\gamma) \ge (k+1)L(1+\tan^2\gamma) \tag{40}$$

folgt. Weiterhin ergibt sich aus (32) nach einigen Umformungen

$$k - 1 = (L-1)\bigl(1 + \cos(R+1)\gamma\bigr) \tag{41}$$

und weiter

$$2L = (k+1) + (k-1)L^2 \tan^2 \gamma.$$

Setzt man letzteren Ausdruck in (40) ein, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}(R+1)\big((k+1) + (k-1)L^2 \tan^2 \gamma + 2L \tan^2 \gamma\big) \geq (k+1)L(1 + \tan^2 \gamma)$$

und damit

$$\tfrac{1}{2}(R+1)(k+1)(1+L^2 \tan^2 \gamma) - (k+1)L(1+\tan^2 \gamma) - (R+1)(L-1)L \tan^2 \gamma \geq 0.$$

Hieraus kommt man mittels

$$L' = \frac{1}{\tan \gamma}\big(\tfrac{1}{2}(R+1)(1 + L^2 \tan^2 \gamma) - L(1 + \tan^2 \gamma)\big)$$

und der aus (41) folgenden Beziehung

$$k' = L'\big(1 + \cos(R+1)\gamma\big) - (R+1)(L-1)\sin(R+1)\gamma$$

nach etwas Rechnung schließlich auf

$$\frac{L'k(k-1) + k'(L-1)}{k^2} \geq 0.$$

Hier steht nun auf der linken Seite gerade die Ableitung des Ausdrucks $(L-1)(k-1)/k$, der für $\gamma \to +0$ gegen $(R-1)^2/(2R)$ strebt, so daß

$$\frac{(L-1)(k-1)}{k} \geq \frac{(R-1)^2}{2R} \tag{42}$$

folgt. Dies ist äquivalent zu

$$2\frac{(R-k)(L-1)}{k} + (R-1)\big(-2(L-1) + (R-1)\big) \leq 0.$$

Ersetzt man noch $(L-1)$ mittels (41), so resultiert (37).

Es verbleibt der Beweis von (38). Offenbar gilt

$$(R-1)\sin R\gamma \sin \gamma\big(1 + \cos(R+1)\gamma\big) + R(\sin R\gamma - \sin \gamma)^2 \geq 0,$$

was nach einigen Umformungen auf

$$(R \cos R\gamma \sin \gamma - \sin R\gamma \cos \gamma)\sin(R+1)\gamma + (R+1)(\sin^2 R\gamma - \sin R\gamma \sin \gamma) \geq 0$$

führt. Dividiert man durch $\sin^2 \gamma$, so steht links $k' \sin(R+1)\gamma + (R+1)(k-1)k$, womit

$$\frac{k'}{k^2} \tan \frac{R+1}{2}\gamma + \frac{R+1}{2}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big)\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}(R+1)\gamma} \geq 0 \tag{43}$$

folgt. Die linke Seite von (43) ist gleich der Ableitung von

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\tan\frac{R+1}{2}\gamma=\frac{(\sin R\gamma-\sin\gamma)\bigl(1-\cos(R+1)\gamma\bigr)}{\sin R\gamma\sin(R+1)\gamma}. \tag{44}$$

Der Grenzwert des letzten Ausdrucks bei $\gamma\to\frac{1}{2}\beta\pi-0$ ergibt sich nach der l'Hospitalschen Regel zu $2/h$. Daher liefert (43)

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\tan\frac{R+1}{2}\gamma\le\frac{2}{h}$$

und mithin wegen (44)

$$0\le\frac{k}{h}\sin(R+1)\gamma-\tfrac{1}{2}(k-1)\bigl(1-\cos(R+1)\gamma\bigr). \tag{45}$$

Durch Addition der aus (39) folgenden Beziehung

$$0\le\left(\frac{R-1}{2R}-\frac{k-1}{2R}\right)\bigl(1+\cos(R+1)\gamma\bigr)$$

kommt man wegen (41) auf

$$\begin{aligned}0\le{}&\frac{k}{h}\sin(R+1)\gamma+\frac{R-1}{2R}\bigl(1+\cos(R+1)\gamma\bigr)\\&+(L-1)\bigl(1+\cos(R+1)\gamma\bigr)\left(\frac{R-1}{2R}\bigl(1+\cos(R+1)\gamma\bigr)-1\right).\end{aligned}$$

Dies wird unter Beachtung von (41) weiter umgeformt zu

$$\frac{k-1}{k\sin(R+1)\gamma}\le\frac{1}{h}+\frac{R-1}{2R}\,\frac{1+\cos(R+1)\gamma}{\sin(R+1)\gamma}.$$

$(R-1)/(2R)$ läßt sich mittels (42) nach oben abschätzen, so daß

$$\frac{(k-1)(R-1)}{k\sin(R+1)\gamma}-\frac{(L-1)(k-1)\bigl(1+\cos(R+1)\gamma\bigr)}{k\sin(R+1)\gamma}\le\frac{R-1}{h}$$

und wieder mit (41)

$$\frac{k-1}{k\sin(R+1)\gamma}\bigl((R-1)-(k-1)\bigr)\le\frac{R-1}{h},$$

also (38) folgt. Damit ist der Beweis von (29) und (30) und letztendlich von (13) erledigt.

Mit der Ungleichung (11) bzw. (15) für die Gebiete $\mathscr{G}_1$ und $\mathscr{G}_2$ gilt für die konstruierte Spiegelung am Tangentenpolygon $\mathscr{C}$ überall

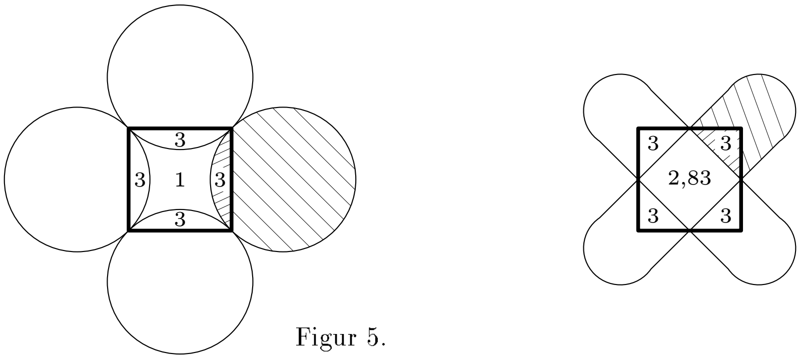
$$p\le\frac{2}{\alpha}-1$$

und für ein gewisses Teilgebiet dabei Gleichheit. Folglich ist

$$Q=\frac{2}{\alpha}-1$$

die kleinste Dilatationsschranke. Nach der Eckenbedingung kann der Spiegelungskoeffizient nicht kleiner sein. Daher ist der angegebene Wert der exakte Spiegelungskoeffizient und die konstruierte Spiegelung möglichst konform, womit der Satz bewiesen ist.

**Bemerkung.** Im Spezialfalle regulärer Vielecke ergibt sich bei unserer im Beweis benutzten Konstruktion eine andere Extremalabbildung als die früher in [9] angegebene. Für speziell das Quadrat sind die minimalen globalen Dilatationsschranken für bestimmte Teilgebiete in Figur 5 eingetragen (links die Spiegelung nach [9], rechts nach dem eben durchgeführten Beweis ($\mathscr{C}_1$ wird beim Quadrat zu einem Geradenstück)).




Figur 5.

Schon an diesem Beispiel ist zu sehen, daß die möglichst konforme Spiegelung an Tangentenpolygonen nicht eindeutig bestimmt ist. Außerdem läßt sich die in dieser Arbeit konstruierte Spiegelung noch mannigfach abändern, ohne daß die im Satz genannte Dilatationsschranke überschritten wird. In dem aus den jeweiligen Teilgebieten $\mathscr{G}_1$ bei Heranziehung aller Winkelräume zusammengesetzten einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathscr{G}^*$ gilt nämlich für die Dilatation

$$p \leq Q^* < Q_{\mathscr{C}} = \frac{2}{\alpha} - 1$$

mit einer (vom vorliegenden Polygon abhängigen) Konstanten $Q^*$, da bei genauerer Betrachtung die Ungleichung (16) für kein $Q$ scharf ist. Schaltet man also in $\mathscr{G}^*$ eine beliebige $Q_{\mathscr{C}}/Q^*$-quasikonforme Abbildung auf sich vor, die den Rand von $\mathscr{G}^*$ punktweise festläßt, so bleibt insgesamt die Dilatationsschranke $Q_{\mathscr{C}}$ erhalten.

## 3. Beweis von Satz 2

Nach der Eckenbedingung gilt $q_{\mathscr{C}} \geq \frac{1}{2}$ bzw. $Q_{\mathscr{C}} \geq 3$ bei Rechtecken. Es sei nun $\mathscr{K}$ ein zum Ursprung der $(X, Y)$-Ebene symmetrisches, achsenparalleles Quadrat der Seitenlänge 2. Hierzu wird unten eine 3-quasikonforme Spiegelung $W(Z)$ angegeben, bei der in einem Teilrechteck $|X| \leq a < 1$, $|Y| \leq 1$ sogar

$$p \leq p_0 := \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5}\,) < 3$$

gilt und die Urbilder der Punkte mit $|\operatorname{Re} W| \leq a$, $|\operatorname{Im} W| \geq 1$ in diesem Rechteck liegen. Durch den so gewonnenen Spielraum kann dann eine 3-quasikonforme Spiegelung an Rechtecken $\mathscr{C}$ mit einem Seitenverhältnis

$$\mu = (1 - a) + a\sqrt{\frac{6}{3 + \sqrt{5}}}$$

wie folgt konstruiert werden (vgl. auch [9]). $\mathscr{C}$ habe die Ecken $\mu + i$, $-\mu + i$, $-\mu - i$ und $\mu - i$. Zunächst wird das Innere von $\mathscr{C}$ durch eine Stauchung mit dem Faktor $\sqrt{3+\sqrt{5}}/\sqrt{6}$ parallel zur Abszissenachse im durch $|X| \le \mu - 1 + a$ beschriebenen Teilgebiet und eine entsprechende Verschiebung der Punkte mit $\mu - 1 + a \le |X| \le \mu$ um $\mu - 1$ ebenfalls parallel zur Abszissenachse auf das Innere von $\mathscr{K}$ abgebildet. Anschließend erfolgt die Spiegelung $W(Z)$ auf das Äußere des Quadrates und zuletzt die zur zuerst durchgeführten Abbildung des Rechtecksinneren auf das des Quadrates inverse Abbildung, aber nun bezogen auf das Äußere beider Kurven. Da bei der Hintereinanderschaltung quasikonformer Abbildungen das Produkt der einzelnen Dilatationsschranken eine obere Schranke für die Gesamtdilatation liefert, ergibt eine Betrachtung der beschriebenen Spiegelung an $\mathscr{C}$ in den einzelnen Teilgebieten die globale Dilatationsschranke $Q = 3$. Folglich muß $Q_{\mathscr{C}} = 3$ gelten.

Für die Beschreibung der Spiegelung an der Quadratlinie $\mathscr{K}$ mit den genannten Bedingungen sei die Ebene durch die vier Symmetrielinien des Quadrats in acht kongruente Winkelräume aufgeteilt, deren im Inneren von $\mathscr{K}$ gelegener Teil quasikonform auf den jeweiligen äußeren Teil unter punktweiser Festhaltung von $\mathscr{K}$ abgebildet wird. Durch die Festlegung, die Abbildung für alle acht Winkelräume in analoger Weise durchzuführen, kann man sich auf einen beschränken, der durch eine Kongruenztransformation so in eine $z^*$- bzw. $w^*$-Ebene gebracht werde, daß der Eckpunkt des Quadrats dem Ursprung, der Seitenmittelpunkt dem Punkt 1 und der Quadratmittelpunkt dem Punkt $1 + i$ entspricht. Mittels der konformen Abbildungen (vgl. Figur 6)

$$z = x + iy = \log \frac{z^*}{2 - z^*}, \qquad w = u + iv = \log \frac{w^*}{2 - w^*} \tag{46}$$

wird die Situation in eine $z$- bzw. $w$-Ebene überpflanzt. Dabei geht die Strecke von 0 nach 1 in die negativ-reelle Achse über, der Strahl $1 + i - ti$ $(0 \le t < \infty)$ in die Strecke von $\frac{1}{2}\pi i$ nach $-\pi i$, die Strecke von 0 nach $1 + i$ in die Kurve

$$y_1 = y_1(x) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\arcsin\bigl(1 - e^{2x}\bigr), \qquad -\infty < x < 0, \tag{47}$$

und der Strahl $-t(1 + i)$ $(0 \le t < \infty)$ in

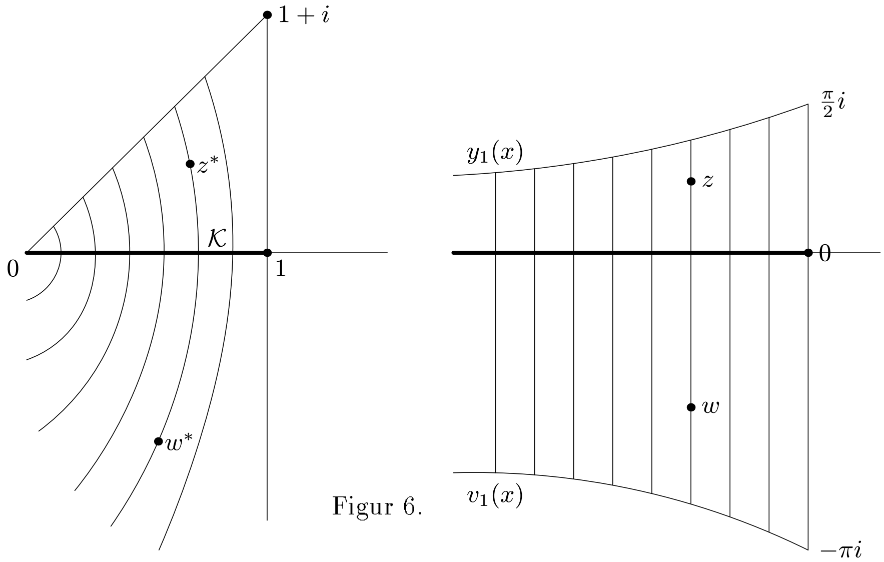
$$v_1 = v_1(u) = -\pi + \tfrac{1}{2}\arcsin\bigl(1 - e^{2u}\bigr), \qquad -\infty < u < 0. \tag{48}$$

Die Abbildung $w(z)$ wird nun definiert durch

$$u = x, \qquad -\infty < x \le 0, \tag{49}$$

$$\frac{v}{v_1(u)} = \frac{y}{y_1(x)}, \qquad 0 \le y \le y_1(x). \tag{50}$$

In (50) ist für $u$ gemäß (49) $x$ zu nehmen, so daß $v$ durch $x$ und $y$ bestimmt ist. Aus (49) und (50) folgen sofort die Stetigkeit und Schlichtheit der Abbildung




Figur 6.

sowie das punktweise Festbleiben von $\mathscr{K}$ (also der negativ-reellen Achse der $z$- bzw. $w$-Ebene). Für den Nachweis, daß die Urbilder der Punkte mit $|\operatorname{Re} W| \le a$ in $|\operatorname{Re} Z| \le a$ liegen, genügt es zu zeigen, daß für einander entsprechende Punkte $z^*$ und $w^*$ gilt

$$\operatorname{Re} z^* \ge \operatorname{Re} w^*. \tag{51}$$

Mit den zu (46) inversen Abbildungen

$$z^* = \frac{2e^z}{1+e^z}, \qquad w^* = \frac{2e^w}{1+e^w}$$

ergibt sich

$$\operatorname{Re} z^* = 1 + \frac{e^{2x}-1}{1+2e^x\cos y + e^{2x}}, \qquad \operatorname{Re} w^* = 1 + \frac{e^{2u}-1}{1+2e^u\cos v + e^{2u}},$$

wobei $u$ und $v$ nach (49) und (50) bestimmt sind. (51) hat wegen $u = x \le 0$ also genau dann Gültigkeit, wenn $\cos v \le \cos y$ erfüllt ist. Letzteres ist aber wahr, weil nach (47) und (48) $v_1 < -y_1$ und daher mit (50) $v \le -y \le 0$ einerseits und ebenfalls wegen (48) und (50) $-\pi \le v_1 \le v$ andererseits gilt.

Aus (47), (49) und (50) folgen (beachte $v_1 = -\frac{1}{2}\pi - y_1$)

$$\begin{aligned} u_x &= 1, \qquad & v_x &= y\frac{d}{dx}\left(\frac{v_1}{y_1}\right) = -y\frac{\pi}{2y_1^2}\frac{1-\sin 2y_1}{\cos 2y_1}, \\ u_y &= 0, \qquad & v_y &= \frac{v_1}{y_1} = -\frac{\pi}{2y_1} - 1. \end{aligned}$$

Mit $0 \leq y \leq y_1$ ergibt sich

$$p + \frac{1}{p} = \frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{-(u_x v_y - u_y v_x)}$$

(52)
$$\leq \frac{1 + \left(\frac{\pi}{2y_1} + 1\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2y_1}\frac{1 - \sin 2y_1}{\cos 2y_1}\right)^2}{\frac{\pi}{2y_1} + 1}$$

$$= 2 + \frac{\pi^2}{(1 + \sin 2y_1)(\pi y_1 + 2y_1^2)}.$$

Nun ist

$$f(y_1) := (1 + \sin 2y_1)(\pi y_1 + 2y_1^2)$$

eine in $\frac{1}{4}\pi \leq y_1 \leq \frac{1}{2}\pi$ konkave Funktion, denn es gilt dort $f''(y_1) < 0$, wie explizites Ausrechnen und eine nähere Diskussion des entstehenden Ausdrucks zeigen. Wegen $f\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{3}{4}\pi^2 < \pi^2 = f\left(\frac{1}{2}\pi\right)$, $f'\left(\frac{1}{2}\pi\right) < 0$ und der Konkavität von $f(y_1)$ muß erstens in $\frac{1}{4}\pi \leq y_1 \leq \frac{1}{2}\pi$

$$f(y_1) \geq f\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) = \tfrac{3}{4}\pi^2$$

und nach (52) deshalb

$$p + \frac{1}{p} \leq \frac{10}{3},$$

folglich $p \leq 3$ im ganzen betrachteten Gebiet richtig sein. Zweitens gibt es genau ein $\hat{y}$ mit $\frac{1}{4}\pi < \hat{y} < \frac{1}{2}\pi$ und $f(\hat{y}) = f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \pi^2$, und mit diesem $\hat{y}$ gilt

$$f(y_1) \geq \pi^2 \qquad \text{für } \hat{y} \leq y_1 \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

Damit ist

$$p + \frac{1}{p} \leq 3,$$

also

(53)
$$p \leq \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$$

für $\hat{y} \leq y_1 \leq \frac{1}{2}\pi$ erfüllt. Weil $y_1$ streng monoton mit $x$ wächst und nach (47) $y_1 = \hat{y}$ der Wert

$$x_0 = \tfrac{1}{2}\log(1 - \sin 2\hat{y})$$

entspricht, besteht die Abschätzung (53) in der $z$-Ebene für $x_0 \leq x < 0$, $0 < y < y_1(x)$. Wegen $x \leq 0$ und $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ gilt

$$\operatorname{Re} z^* = 1 + \frac{e^{2x} - 1}{1 + 2e^x \cos y + e^{2x}} \leq 1 + \frac{e^{2x} - 1}{\left(e^x + 1\right)^2} < \frac{2e^{x_0}}{e^{x_0} + 1}$$

für alle Punkte der $z^*$-Ebene, deren Entsprechungen in der $z$-Ebene in $x = \operatorname{Re} z < x_0$ liegen. Dies bedeutet, daß bei $w^*(z^*)$ für alle $z^*$ mit

$$\operatorname{Re} z^* \geq \frac{2e^{x_0}}{e^{x_0}+1}$$

$\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ eine Dilatationsschranke darstellt. Für die Konstante $a$ ist daher jeder Wert mit

$$0 < a \leq 1 - \frac{2e^{x_0}}{e^{x_0}+1}$$

wählbar. Numerisches Ausrechnen von $\hat{y}$, $x_0$, der oberen Schranke für $a$ und des zugehörigen $\mu$ liefert als Fazit, daß für alle Rechtecke $\mathscr{C}$ mit einem Seitenverhältnis von $\mu \leq 1{,}037$ noch $q_{\mathscr{C}} = \frac{1}{2}$, also in der Eckenbedingung Gleichheit, gilt.

## 4. Beweis von Satz 3

Nach [9] sind das Problem der möglichst konformen Spiegelung an einer geschlossenen Jordankurve $\mathscr{C}$ und das der möglichst konformen Fortsetzung der Abbildung $w(z)$ der Klasse $\Sigma$, bei der $\mathscr{C}$ als Rand des Bildes von $|z| > 1$ entsteht (bis auf eine lineare Transformation), äquivalent. Dabei umfaßt die Klasse $\Sigma$ alle in $|z| > 1$ schlichten konformen Abbildungen $w(z)$, die hydrodynamisch normiert sind. Ist $w(z) \in \Sigma$ nach $|z| \leq 1$ noch $Q$-quasikonform fortsetzbar, so gehört $w(z)$ zur Klasse $\Sigma(Q)$. Die Äquivalenz der beiden Probleme bedeutet insbesondere

$$Q_{\mathscr{C}} = \inf\bigl\{Q : \mathscr{C} \text{ ist das Bild von } |z| = 1 \text{ bei einer Abbildung } w(z) \in \Sigma(Q)\bigr\},$$

wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mathscr{C}$ als Bild von $|z| = 1$ bei einer Abbildung $w(z) \in \Sigma$ angenommen wird.

Nach [6, S. 113] gilt für den von $\mathscr{C}$ umschlossenen Flächeninhalt

$$I \geq \pi(1-q^2), \qquad q = \frac{Q-1}{Q+1}. \tag{55}$$

Für das Rechteck nun läßt sich die Abbildung $w(z)$ durch die Schwarz–Christoffelsche Formel explizit angeben. Die Längen der Rechteckseiten ergeben sich dabei zu

$$a = a(k) = 4\bigl(E(k') - k^2 K(k')\bigr), \tag{56}$$

$$b = b(k) = 4\bigl(E(k) - k'^2 K(k)\bigr) \tag{57}$$

mit $k = \sin\alpha$, $k' = \cos\alpha$ und den üblichen Bezeichnungen für die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, wobei sich das gewünschte Seitenverhältnis $\mu = \mu(k) = a/b \geq 1$ durch passende Wahl von $\alpha$ aus $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}\pi$ einstellt. Wenn nun die Eckenbedingung $q_{\mathscr{C}} \geq \frac{1}{2}$ mit Gleichheit gelten soll, so muß gemäß (55)

$$I = I(k) = ab \geq \tfrac{3}{4}\pi$$

richtig sein. Mit Hilfe der einschlägigen Beziehungen zwischen den elliptischen Integralen erhält man

$$\frac{da}{dk} = -4kK(k'), \qquad \frac{db}{dk} = 4kK(k). \tag{58}$$

Nun ist $I(k) = ab$ eine in $0 < k < \frac{1}{2}\sqrt{2}$, also in $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$, streng monoton wachsende Funktion. Zum Beweis dieser Tatsache wird von

$$E(k) < K(k), \qquad E(k') < E(k), \qquad K(k') > K(k)$$

ausgegangen, was auf

$$8E(k')\big(E(k) - K(k)\big) + 8k^2\big(E(k')K(k) - E(k)K(k')\big) < 0 \tag{59}$$

führt. Die linke Seite läßt sich mittels (56), (57) und (58) auf die Form

$$kk'^2 \frac{d\big(aK(k) - bK(k')\big)}{dk}$$

bringen, womit (59)

$$\frac{d\big(aK(k) - bK(k')\big)}{dk} < 0 \qquad \text{für } 0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ergibt. Da $aK(k) - bK(k')$ bei $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ verschwindet, gilt mithin in $0 < k \le \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$aK(k) - bK(k') \ge 0$$

mit Gleichheit genau für $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Damit folgt weiter für $0 < k < \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$0 < 4kaK(k) - 4kbK(k') = a\frac{db}{dk} + \frac{da}{dk} = \frac{dI(k)}{dk}$$

und daraus die behauptete Monotonieeigenschaft.

Nach (58) fällt $a$ und wächst $b$ streng monoton mit $k$. Daher ist $\mu = a/b$ eine streng monoton fallende Funktion von $k$, wobei $\mu = 1$ für $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ gilt. Zusammen mit der Monotonie von $I(k)$ ergibt sich, daß es höchstens einen Wert $\mu_1 \ge 1$ geben kann, für den $I(\mu_1) = \frac{3}{4}\pi$ gilt. Und falls ein $\mu_1$ mit dieser Eigenschaft existiert, so folgt weiter

$$I < \tfrac{3}{4}\pi \qquad \text{für } \mu > \mu_1,$$

also nach (55) $q_{\mathscr{C}} > \frac{1}{2}$. Die numerische Auswertung zeigt die tatsächliche Existenz eines solchen $\mu_1$ und liefert dafür den im Satz angegebenen Wert von etwa 2,76.

## 5. Beweis von Satz 4

Mit der aus [9, S. 105] entnommenen Abschätzung

$$Q_{\mathscr{C}}(\mu) \leq \frac{\pi}{\operatorname{arccot}\mu} - 1$$

ist für die Behauptung $Q_{\mathscr{C}}(\mu)/\mu < \pi$ hinreichend

$$\pi < (\pi\mu + 1)\operatorname{arccot}\mu \qquad \text{für } \mu \geq 1,$$

was durch die Substitution $\varphi = \operatorname{arccot}\mu$ äquivalent übergeht in

$$g(\varphi) := (\pi \cot \varphi + 1)\varphi > \pi \qquad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \tfrac{1}{4}\pi. \tag{60}$$

Aus der im Inneren des betrachteten Intervalls gültigen Relation $\varphi < \tan\varphi$ folgt

$$g''(\varphi) = 2\pi \cot \varphi(1 + \cot^2 \varphi)(\varphi - \tan \varphi) < 0.$$

Damit ist $g(\varphi)$ streng konkav und nimmt daher, wenn noch $g(0) = \pi$ gesetzt wird, sein Minimum in $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{4}\pi$ an einer der Intervallgrenzen an, woraus wegen $g(0) = \pi < (\pi + 1)\frac{1}{4}\pi = g(\frac{1}{4}\pi)$ sofort (60) resultiert.

Zum Beweis der Abschätzung $\frac{1}{4}\pi < Q_{\mathscr{C}}(\mu)/\mu$ habe das Rechteck wieder die beim Beweis des vorigen Satzes normierte Lage, entstehe also als Bild des Einheitskreises bei einer Abbildung der Klasse $\Sigma$. Diese Abbildung ist dann bei einem Rechteck $\mathscr{C}$ des Seitenverhältnisses $\mu \geq 1$ aus $\Sigma\big(Q_{\mathscr{C}}(\mu)\big)$. Mit den Bezeichnungen des letzten Abschnitts, wobei wieder $0 < k \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ angenommen werden kann, folgt aus (58)

$$\frac{d(b + \frac{1}{4}\pi a)}{dk} = 4k\big(K(k) - \tfrac{1}{4}\pi K(k')\big) \tag{61}$$

und aus den Beziehungen zwischen den elliptischen Integralen

$$\frac{d\big(K(k) - \frac{1}{4}\pi K(k')\big)}{dk} = \frac{1}{4kk'^2}\big(b + \tfrac{1}{4}\pi a\big) > 0.$$

$K(k) - \frac{1}{4}\pi K(k')$ wächst also streng monoton mit $k$. Da selbiger Ausdruck für $k \to 0$ gegen $-\infty$ strebt und für $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ positiv ist, gibt es nach (61) einen Wert $k_0$ mit $0 < k_0 < \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so daß $b + \frac{1}{4}\pi a$ in $0 < k < k_0$ fällt und in $k_0 < k < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ wächst. Wegen $b + \frac{1}{4}\pi a \to \pi$ bei $k \to 0$ und $b(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,) + \frac{1}{4}\pi a(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,) < \pi$, was sich leicht nachrechnen läßt, ergibt sich damit

$$b + \tfrac{1}{4}\pi a < \pi \qquad \text{für } 0 < k \leq \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Unter Beachtung von $I = ab$ und $\mu = a/b$ kann man weiter schließen auf

$$b^2\left(1+\tfrac{1}{4}\pi\mu\right)^2 < \pi^2 \qquad \text{und} \qquad I\left(1+\tfrac{1}{4}\pi\mu\right)^2 < \pi^2\mu.$$

Wird $I$ mit der Bedingung (55) nach unten abgeschätzt, so erhält man

$$q^2_{\mathscr{C}}(\mu) > \frac{(\frac{1}{4}\pi\mu - 1)^2}{(\frac{1}{4}\pi\mu + 1)^2}.$$

Für $\mu > 4/\pi$ (für $1 \le \mu \le 4/\pi$ ist $\frac{1}{4}\pi \le Q_{\mathscr{C}}(\mu)$ wegen $Q_{\mathscr{C}} \ge 1$ trivial) folgt schließlich

$$q_{\mathscr{C}}(\mu) > \frac{\frac{1}{4}\pi\mu - 1}{\frac{1}{4}\pi\mu + 1}$$

und daraus die Behauptung.

**Literatur**

[1] Ahlfors, L. V.: Remarks on the Neumann–Poincaré integral equation. - Pacific J. Math. 2, 1952, 271–280.

[2] Ahlfors, L. V.: Quasiconformal reflections. - Acta Math. 109, 1963, 291–301.

[3] Bronstein, I. N., und K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. - 20. Aufl., Nauka, Moskau; BSB B. G. Teubner, Leipzig, 1981.

[4] Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. - Springer–Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1964.

[5] Gehring, F. W.: Characteristic properties of quasidisks. - Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1982.

[6] Kruschkal, S. L., und R. Kühnau: Quasikonforme Abbildungen – neue Methoden und Anwendungen. - BSB B. G. Teubner, Leipzig, 1983.

[7] Kühnau, R.: Quasikonforme Fortsetzbarkeit, Fredholmsche Eigenwerte und Grunskysche Koeffizientenbedingungen. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 7, 1982, 383–391.

[8] Kühnau, R.: Zur Berechnung der Fredholmschen Eigenwerte ebener Kurven. - Z. Angew. Math. Mech. 66, 1986, 193–200.

[9] Kühnau, R.: Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve. - Jahresber. d. Deutschen Math.–Ver. 90, 1988, 90–109.

[10] Lehto, O., und K. I. Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. - Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1965.

[11] Ryshik, I. M., und I. S. Gradstein: Tafeln–Tables (Übersetzung aus dem Russischen); 2. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.

[12] Schober, G.: Estimates for Fredholm Eigenvalues Based on Quasiconformal Mapping. - Lecture Notes in Math. 333, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973, 211–217.

Eingegangen am 6. Oktober 1995