Ueber die Gesetze der Vertheilung von Spannungselectricität in ponderabeln Körpern, wenn diese nicht als vollkommene Leiter oder Nichtleiter, sondern als dem Enthalten von Spannungselectricität mit endlicher Kraft widerstrebend betrachtet werden.

Bernhard Riemann

[Amtlicher Bericht über die 31. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Göttingen im September 1854.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Ueber die Gesetze der Vertheilung von Spannungselectricität in ponderabeln Körpern, wenn diese nicht als vollkommene Leiter oder Nichtleiter, sondern als dem Enthalten von Spannungselectricität mit endlicher Kraft widerstrebend betrachtet werden.

Bernhard Riemann

[Amtlicher Bericht über die 31. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Göttingen im September 1854.*]

Mittelst der sinnreichen Werkzeuge für Spannungselectricität, welche Herr Prof. *Kohlrausch* in der gestrigen Sitzung dieser Section erwähnte, hat derselbe auch die Bildung des Rückstandes in der Leydener Flasche und in andern Apparaten zur Bindung von Electricität untersucht. Diese Erscheinung ist im Wesentlichen folgende: Wenn man eine Leydener Flasche, nachdem sie längere Zeit geladen gestanden hat, entladet und sie dann eine Zeit lang isolirt stehen lässt, so tritt nach einiger Zeit eine merkliche Ladung wieder auf. Sie führt zu der Annahme, dass bei der ersten Entladung nur ein Theil der geschiedenen Electricitätsmenge sich wieder vereinigte, ein Theil aber in der Flasche zurückblieb. Den ersten Theil nennt man die disponible Ladung, den zweiten den Rückstand. Die Genauigkeit der Messungen, welche Herr Prof. *Kohlrauch* über das Sinken der disponibeln Ladung und über das Wiederauftreten des Rückstandes angestellt hat, reizte mich, an derselben ein aus andern Gründen wahrscheinliches Gesetz zu prüfen, welches eine in der bisherigen Theorie der Spannungselectricität vorhandene Lücke ausfüllt.

Bekanntlich beziehen sich die mathematischen Untersuchungen über Spannungselectricität auf ihre Vertheilung in vollkommenen und völlig isolirten Leitern; man betrachtet also die ponderabeln Körper entweder als absolute

*Vortrag gehalten am 21. Sept. 1854.

Leiter oder als absolute Nichtleiter. Eine Folge davon ist, dass nach dieser Theorie sich beim Gleichgewicht die gesammte Spannungselectricität nur an den Grenzflächen der Leiter und Isolatoren ansammelt. Zugestandenermassen aber ist dies eine blosse Fiction. In der Natur wird es weder einen Körper geben, in welchen durchaus keine Spannungselectricität eindringen kann, noch einem Körper, in welchem sich die gesammte Spannungselectricität auf eine mathematische Fläche zusammenziehen kann. Man muss vielmehr annehmen, dass die ponderabeln Körper dem Aufnehmen oder dem Enthalten von Spannungselectricität mit endlicher Kraft widerstreben, und zwar ist die Annahme, deren Consequenzen sich der Erfahrung gemäss zeigen, die, dass sie nicht dem electrisch Werden oder dem Aufnehmen von Spannungselectricität, sondern dem electrisch Sein oder dem Enthalten von Spannungselectricität widerstreben. Das Gesetz dieses Widerstrebens ist, je nach der dualistischen oder unitarischen Vorstellungsart, folgendes. Nach der dualistischen Vorstellungsart, nach welcher die Spannungselectricität der Ueberschuss der positiven Electricität über die negative ist, muss man in jedem Punkte des ponderabeln Körpers eine Ursache annehmen, welche mit einer der Dichtigkeit dieses Ueberschusses proportionalen Intensität die Dichtigkeit der Electricität gleichen Zeichens—derjenigen, welche im Ueberschuss vorhanden ist—zu verminden und die der entgegengesetzten zu vermehren strebt. Nach der unitarischen Auffassungsweise, nach welcher die Spannungselectricität der Ueberschuss der in dem Körper enthaltenen Electricität über ihm natürliche ist, muss man in jedem Punkte desselben eine Ursache annehmen, welche mit einer der Dichtigkeit dieses Ueberschusses proportionalen Intensität die Dichtigkeit der Electricität zu vermindern oder bei negativem Ueberschuss zu vermehren strebt. Ausser dieser Bewegungsursache hat man nun, wenn keine merklichen thermischen oder magnetischen oder voltainductorischen Wirkungen und Einflüsse stattfinden, und die ponderabeln Körper gegen einander ruhen, nur noch die dem *Coulomb*'schen Gesetz gemässe electromotorische Kraft in Rechnung zu ziehen. Unter denselben Umständen kann man für die Abhängigkeit der erfolgten Bewegung von den Bewegungsursachen Proportionalität zwischen electromotorischer Kraft und Stromintensität annehmen.

Um diese Bewegungsgesetze in Formeln auszudrücken, seien x, y, z rechtwinklige Coordinaten und im Punkte (x, y, z) zur Zeit t die Dichtigkeit der Spannungselectricität ϱ, und u der $4\pi^{\text{te}}$ Theil des Potentials der gesammten Spannungselectricität nach *Gauss*'scher Definition nach welcher das Potential in einem bestimmten Punkte gleich ist dem Integral über sämmtliche Massen Spannungselectricität, jede dividirt durch die Entfernung von diesem Punkte. Die dem *Coulomb*'schen Gesetz gemässe electromotorische Kraft ist dann, nach den Richtungen der drei Axen zerlegt, proportional

$$-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial z},$$

die von der Reaction des ponderabeln Körpers herrührende proportional

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \varrho}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \varrho}{\partial z}.$$

Die Componenten der electromotorischen Kraft können also gleich gesetzt werden

$$-\frac{\partial u}{\partial x} - \beta^2 \frac{\partial \varrho}{\partial x}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} - \beta^2 \frac{\partial \varrho}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial z} - \beta^2 \frac{\partial \varrho}{\partial z},$$

wo β^2 nur von der Natur des ponderabeln Körpers abhängt. Diesen sind nun die Componenten der Stromintensität proportional, sie sind also $= \alpha\xi$, $\alpha\eta$, $\alpha\zeta$, wenn man durch ξ, η, ζ die Componenten der Stromintensität und durch α eine von der Natur des ponderabeln Körpers abhängige Constante bezeichnet.

Verbindet man hiermit die phoronomische Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

welche man erhält, indem man die in das Raumelement $dx\,dy\,dz$ im Zeitelement dt einströmende Electricitätsmenge auf doppelte Weise ausdrückt, und die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\varrho,$$

welche aus dem Begriffe des Potentials folgt, so erhält man, indem man erstere mit α multiplicirt und für ξ, η, ζ ihre Werthe setzt, die Gleichung

$$\alpha \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho - \beta^2 \left\{ \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2} \right\} = 0.$$

Diese giebt für u eine partielle Differentialgleichung, welche in Bezug auf t von ersten, in Bezug auf die Raumcoordinaten vom vierten Grade ist, und um von einem bestimmten Zeitpunkte an u innerhalb des ponderabeln Körpers allenthalben vollständig zu bestimmen, werden ausser dieser Gleichung in jedem Punkte desselben Eine Bedingung für die Anfangszeit und für die Folge in jedem Oberflächenpunkte zwei Bedingungen erforderlich sein.

Ich werde nun die Consequenzen dieser Gesetze in einigen besonderen Fällen mit der Erfahrung vergleichen.

Für das Gleichgewicht (in einem System isolirter Leiter) ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \beta^2 \frac{\partial \varrho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \beta^2 \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0$$

oder

$$u + \beta^2 \varrho = \text{Const.},$$

oder, da

$$-\varrho = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$u - \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \text{Const.}$$

Für die Stromausgleichung oder den Beharrungszustand der Vertheilung (im Schliessungsbogen constanter Ketten) ist

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

oder

$$\varrho - \beta^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Wenn nun die Länge β gegen die Dimensionen des ponderabeln Körpers sehr klein ist, so nimmt $u -$ Const. im erstern Falle und ϱ im zweiten von der Oberfläche ab sehr schnell ab und ist im Innern überall sehr klein, und zwar ändern sich diese Grössen mit dem Abstande p von der Oberfläche nahe wie $e^{-\frac{p}{\beta}}$. Dieser Fall wird bei den metallischen Leitern angenommen werden müssen; wird $\beta = 0$ gesetzt, so erhält man die bekannten Formeln für vollkommene Leiter.

Bei der Anwendung dieser Gesetze auf die Rückstandsbildung in der Leydener Flasche musste ich, da Angaben über die Dimensionen der Apparate fehlten, annehmen, dass die Dimensionen derselben gegen den Abstand der Belegungen als unendlich gross betrachtet werden dürften. Mit der Ausführung der Rechnung wage ich die verehrten Anwesenden nicht zu ermüden und begnüge mich das Resultat derselben anzugeben.

Aus dem Messungen des Herrn Prof. *Kohlrausch* hatte sich ergeben, dass die disponible Ladung, als Function der Zeit betrachtet, nahe durch eine Parabel dargestellt wird, dass jedoch der Parameter der Parabel, welche sich der Ladungscurve am nächsten anschliesst, langsam abnimmt, so dass wenn man die anfängliche Ladung durch L_0, die zur Zeit t durch L_t bezeichnet, $\dfrac{L_0 - L_t}{\sqrt{t}}$ eine Grösse ist, welche mit wachsendem t allmählich abnimmt.

Dasselbe ergab sich auch aus der Rechnung, wenn angenommen wurde, dass sowohl α als β^2 beim Glase, wie dies von vorn herein zu erwarten war, sehr gross sei und als unendlich gross betrachtet werden dürfe, während ihr Quotient endlich bleibt. Eine schärfere Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen habe ich nicht angestellt, namentlich aus dem Grunde, weil mir Angaben über die Dimensionen der Apparate und überhaupt alle Mittel fehlten, die wegen der Abweichungen von den Voraussetzungen der Rechnung nöthigen Correctionen zu bestimmen. Es wäre eine solche namentlich zur Bestimmung der electrischen Constanten des Glases zu wünschen. Doch halte ich das hier aufgestellte Gesetz für die Vertheilung der Spannungselectricität für vollkommen durch die Messungen des Herrn Prof. *Kohlrausch* bestätigt.

Ich darf wohl noch in der Kürze die Anwendung dieses Gesetzes auf einen andern Gegenstand besprechen.

Bekanntlich wird die Fortpflanzung der galvanischen Ströme in metallischen Leitern und die in Folge derselben stattfindene Stromausgleichung bei constanten oder langsam sich ändernden electromotorischen Kräften durch die dabei auftretende Spannungselectricität bewirkt. Dieser Vorgang ist wegen seiner ungemein kurzen Dauer und der hinzukommenden thermischen und magnetischen Wirkungen nur in seinen Resultaten der experimentalen Forschung zugänglich, und die einzigen experimentellen Bestimmungen, welche wir darüber haben, sind die Messungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Telegraphendrähten und die *Ohm*'schen Gesetze der Stromausgleichung. Eine genauere Analyse der *Ohm*'schen Gesetze führt indess ebenfalls zu der hier gemachten Annahme, und ich wurde in der That dadurch zuerst auf sie geführt.

Ohm bestimmt die Stromvertheilung bei der Stromausgleichung durch folgende zwei Bedingungen:

1) Um die den wirklich erfolgten Stromintensitäten proportionalen electromotorischen Kräfte zu erhalten, muss man zu den äussern electromotorischen Kräften Kräfte hinzufügen, welche die Differentialquotienten Einer Function des Orts, der Spannung, sind.

2) Bei der Stromausgleichung stömt in jeden Theil des ponderabeln Leiters eben so viel Electricität ein als aus.

Ohm glaubte nun, dass die Spannung, diese Function des Orts, von welcher die inneren electromotorischen Kräfte die Differentialquotienten sind, von der Spannungselectricität so abhinge, dass sie ihrer Dichtigkeit proportional sei, welche Annahme in der That das Zustandekommen beider Bedingungen erklärt. Aber es haben schon, fast gleichzeitig, Herr Prof. *Weber*[1]

[1] Abhandlungen d. k. sächs. Ges. d. W. 1852, I. S. 293.

und *Kirchhoff*[2] darauf aufmerksam gemacht, dass dann die Electricität im Gleichgewicht sein müsste, wenn sie den ponderabeln Körper mit gleichmässiger Dichtigkeit erfüllte, während sie doch der Erfahrung nach beim Gleichgewicht auf der Oberfläche vertheilt ist. Die Spannung muss eine Function sein, welche beim Gleichgewicht in ganzen Leiter constant ist, und also vielmehr dem Potential der Spannungselectricität proportional sein, und diese innern electromotorischen Kräfte sind mit den dem *Coulomb*'schen Gesetz gemässen identisch.

Diese Ansicht über die Spannung wurde auch von den meisten Forschern angenommen. Dabei aber blieb es ununtersucht, durch welche Ursachen bei der Stromausgleichung die zweite Bedingung hergestellt wurde, dass in jedem ponderabeln Körpertheil die Electricitätsmenge constant bleibe.

Nach der dualistischen Auffassung muss sowohl die positive als die negative Electricitätsmenge constant bleiben; dass kein merklicher Ueberschuss Einer Electricität sich bilde, scheint man, wenigstens so lange man auf die Grössenverhältnisse nicht näher eingeht, aus der Anziehung der entgegengesetzten Electricitäten nach dem *Coulomb*'schen Gesetz erklären zu können, und man muss dann noch eine Ursache, dass die neutrale Electricität in jedem Körpertheil constant bleibe, also einen Druck des Ponderabile auf sie, annehmen. Diese Annahme habe ich auf Anregung des Herrn Prof. *Weber* schon vor mehreren Jahren der Rechnung zu unterwerfen gesucht, ohne zu einem befriedigenden Resultat zu gelangen.

Nach unitarischer Auffassung bedarf es nur eine Ursache, welche die in einem ponderabeln Körpertheil enthaltene Electricitätsmenge constant zu erhalten strebt. Man wird so geradeswegs zu der obigen Annahme geführt, dass jeder ponderabele Körper Electricität von bestimmter Dichtigkeit zu besitzen strebt und sowohl einem grösseren als einem geringeren erfüllt Sein widerstrebt. Das Gesetz dieses Widerstrebens kann man so annehmen, wie es sich für das Glas durch die Erfahrung bestätigt hat.

Diese Betrachtungen führen also dazu, die ursprüngliche *Franklin*'sche Auffassung der electrischen Erscheinungen als diejenige anzunehmen, welche man für das tiefere Eindringen in den Zusammenhang dieser Erscheinungen unter sich und mit andern Erscheinungen zu Grunde zu legen und der weitern Aus- und Umbildung nach den Geboten und Winken der Erfahrung zu unterwerfen hat.

Möchten sie in dem Kreise bewährter Forscher, vor denen ich sie zu entwickeln die Ehre hatte, einer nähern Prüfung werth gefunden werden.

[2] Poggendorff's Annalen. Bd. 79, S. 506.