Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill$^{\text{ma}}$ Academia Parisiensi propositae:

"Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfeni pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température q'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes."

.

Bernhard Riemann

[Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke, ed. Heinrich Weber, 2nd edition, Teubner 1892, pp. 391–404.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill$^{\text{ma}}$ Academia Parisiensi propositae:

"Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfeni pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température q'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes."

Bernhard Riemann

[Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke, ed. Heinrich Weber, 2nd edition, Teubner 1892, pp. 391–404.]

Et his principiis via sternitur ad majora.

1.

Quaestionem ab ill$^{\text{ma}}$ Academia propositam ita tractabimus, ut primum quaestionem generaliorem solvamus:

> quales esse debeant proprietates corporis motum caloris determinantes et distributio caloris, ut detur systema linearum quae semper isothermae maneant,

deinde

> ex solutione generali hujus problematis eos casus seligamus, in quibus proprietates illae evadant ubique eaedem, sive corpus sit homogeneum.

Pars prima.

2.

Priorem quaestionem ut aggrediamur, considerandus est motus caloris in corpore qualicunque. Si u denotat temperaturam tempore t in puncto

(x_1, x_2, x_3) aequationem generalem, secundum quam haec functio u variatur, hujus esse formae constat,

$$
\text{(I)}\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(a_{1,1}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+a_{1,2}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+a_{1,3}\dfrac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_1}\\
&+\frac{\partial\left(a_{2,1}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+a_{2,2}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+a_{2,3}\dfrac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_2}\\
&+\frac{\partial\left(a_{3,1}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+a_{3,2}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+a_{3,3}\dfrac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_3} \quad = \quad h\frac{\partial u}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Qua in aequatione quantitates a conductibilitates resultantes, h calorem specificum pro unitate voluminis, sive productum ex calore specifico in densitatem designant et tanquam functiones pro lubitu datae ipsarum x_1, x_2, x_3 spectantur. Disquisitionem nostram ad eum casum restringimus, in quo conductibilitas eadem est in binis directionibus oppositis ideoque inter quantitates a relatio

$$a_{\iota,\iota'} = a_{\iota',\iota}$$

intercedit. Praeterea quum calor a loco calidiore in frigidiorem migret necesse est, ut forma secundi gradus

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{2,2}, & a_{3,3} \\ a_{2,3}, & a_{3,1}, & a_{1,2} \end{pmatrix}$$

sit positiva.

3.

Iam in aequatione (I) in locos coordinatarum rectangularium x_1, x_2, x_3 tres variabiles independentes quaslibet novas s_1, s_2, s_3 introducamus.

Haec transformatio aequationis (I) facillime inde peti potest, quod haec aequatio conditio est necessaria et sufficiens, ut, designante δu variationem quamcunque infinite parvam ipsius u, integrale

$$\text{(A)}\qquad \delta\iiint\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\frac{\partial u}{\partial x_{\iota'}}\,dx_1\,dx_2\,dx_3+\iiint 2h\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\delta u\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

per corpus extensum, solum a valore variationis δu in superficie pendeat. Introductis novis variabilibus haec expressio (A) transibit in

$$\text{(B)}\qquad \delta\iiint\sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'}\frac{\partial u}{\partial s_\iota}\frac{\partial u}{\partial s_{\iota'}}\,ds_1\,ds_2\,ds_3+\iiint 2k\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\delta u\,ds_1\,ds_2\,ds_3$$

posito brevitatis causa

$$\frac{\displaystyle\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'} \frac{\partial s_\mu}{\partial x_\iota}\frac{\partial s_\nu}{\partial x_{\iota'}}}{\displaystyle\sum \pm \frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\frac{\partial s_3}{\partial x_3}} = b_{\mu,\nu}, \quad \frac{h}{\displaystyle\sum \pm \frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\frac{\partial s_3}{\partial x_3}} = k.$$

Quodsi formarum secundi gradus

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{2,2}, & a_{3,3} \\ a_{2,3}, & a_{3,1}, & a_{1,2} \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} b_{1,1}, & b_{2,2}, & b_{3,3} \\ b_{2,3}, & b_{3,1}, & b_{1,2} \end{pmatrix}$$

determinantes sunt A, B et formae adjunctae

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}, & \alpha_{2,2}, & \alpha_{3,3} \\ \alpha_{2,3}, & \alpha_{3,1}, & \alpha_{1,2} \end{pmatrix} \qquad (4) \quad \begin{pmatrix} \beta_{1,1}, & \beta_{2,2}, & \beta_{3,3} \\ \beta_{2,3}, & \beta_{3,1}, & \beta_{1,2} \end{pmatrix}$$

invenietur

$$A = B \sum \pm \frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\frac{\partial s_3}{\partial x_3}$$

et

$$\beta_{\mu,\nu} = \sum_{\iota,\iota'} \alpha_{\iota,\iota'} \frac{\partial x_\iota}{\partial s_\mu}\frac{\partial x_{\iota'}}{\partial s_\nu}$$

ideoque

$$\sum_{\iota,\iota'} \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$$

et

$$\frac{h}{A} = \frac{k}{B}.$$

Unde facile perspicitur transformationem aequationis (I) reduci posse ad transformationem expressionis $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$.

Quae quum ita sint, problema nostrum generale hoc modo solvere possumus, ut primum quaeramus, quales esse debeant functiones $b_{\iota,\iota'}$ et k ipsarum s_1, s_2, s_3, ut u ab una harum quantitatum non pendere possit. Qua quaestione soluta expressio $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ formari poterit. Tum ut, datis valoribus quantitatum $a_{\iota,\iota'}$ et quantitatis h, inveniamus, num u functio temporis et duarum tantum variabilium fieri possit et quibusnam in casibus, quaerendum est, an expressio illa $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ in formam datam transformari possit; et hanc quaestionem infra videbimus eadem fere methodo tractari posse, qua *Gauss* in theoria superficierum curvarum usus est.

4.

Primum igitur quaeramus, quales esse debeant functiones $b_{\iota,\iota'}$ et k ipsarum s_1, s_2, s_3, ut u ab una harum quantitatum non pendere possit. Ut denotationem simpliciorem reddamus, quantitates s_1, s_2, s_3 per α, β, γ designemus et formam (2) per

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$$

si u a γ non pendet, aequatio differentialis erit formae

$$(\mathrm{II}) \qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + 2c'\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + b\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + e\frac{\partial u}{\partial\alpha} + f\frac{\partial u}{\partial\beta} - k\frac{\partial u}{\partial t} = F = 0$$

posito

$$\frac{\partial a}{\partial\alpha} + \frac{\partial c'}{\partial\beta} + \frac{\partial b'}{\partial\gamma} = e, \quad \frac{\partial b}{\partial\beta} + \frac{\partial c'}{\partial\alpha} + \frac{\partial a'}{\partial\gamma} = f.$$

Tribuendo ipsi γ valores determinatos diversos ex aequatione (II) inter sex quotientes differentiales ipsius u obtinebuntur aequationes diversae, quarum coefficientes a γ non pendent. Quodsi ex his aequationibus m sunt a se independentes

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_m = 0,$$

ita ut caeterae omnes ex iis sequantur, aequatio $F = 0$ necesse est pro quovis ipsius γ valore ex his m aequationibus fluat, unde F formae esse debet

$$c_1F_1 + c_2F_2 + \cdots + c_mF_m,$$

qua in expressione solae quantitates c a γ pendent.

Iam casus singulos, quando m est 1, 2, 3, 4 paulo accuratius examinemus simulque aequationes a γ independentes, in quas aequatio $F = 0$ dissolvitur, in formas simpliciores redigere curemus.

Casus primus $m = 1$.

Si $m = 1$, in aequatione (II) rationes coefficientum a γ non pendebunt. At introducendo in locum ipsius γ novam variabilem $\int k\,d\gamma$ semper effici potest, ut k fiat $= 1$, quo pacto coefficientes omnes a γ evadent independentes. Porro introducendo in locos ipsarum α, β novas variabiles semper effeci potest, ut a et b evanescant. Hoc enim eveniet, si expressio $b\,d\alpha^2 + 2c'\,d\alpha\,d\beta + a\,d\beta^2$ (quae quadratum expressionis differentialis linearis esse nequit, si (2) est forma positiva) in formam $m\,d\alpha'\,d\beta'$ redigitur et quantitates α', β' tanquam variabiles independentes sumuntur.

Aequatio igitur differentialis (II) hoc in casu in formam

$$2c' \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + e \frac{\partial u}{\partial\alpha} + f \frac{\partial u}{\partial\beta} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

redigi potest et in forma (2) a, b tum erunt $= 0$, a' et b' functiones lineares ipsius γ, et c' a γ independens. Caeterum patet temperaturam in hoc casu semper a γ independentem manere, si temperatura initialis sit functio quaelibet solarum α et β.

Casus secundus, $m = 2$.

Sic aequatio (II) in duas aequationes a γ independentes discinditur, ope alterius $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ ex altera ejici potest. Brevitatis causa haec ita exhibeatur

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

illa

$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{2}$$

denotantibus Δ et Λ expressiones characteristicas ex ∂_α et ∂_β conflatas.

Aequationem priorem facile perspicitur mutatis variabilibus independentibus ita transformari posse ut sit Δ

$$\begin{aligned} \text{vel} \quad &= \quad \partial_\alpha\partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta \\ \text{vel} \quad &= \quad \partial_\alpha^2 + e\partial_\alpha + f\partial_\beta \\ \text{vel} \quad &= \quad \partial_\alpha, \end{aligned}$$

valoribus $e = 0$, $f = 0$ non exclusis.

Quoniam sit

$$0 = \partial_t \Delta u = \Delta \partial_t u = \Delta\Lambda u,$$

ex his duabus aequationibus (1) et (2) sequitur

$$\Delta\Lambda u = 0. \tag{3}$$

Iam duo distinguendi sunt casus, prout haec aequatio (3) vel ex aequatione (1) fluat, (α), sive sit

$$\Delta\Lambda = \Theta\Delta$$

denotante Θ novam expressionem characteristicam, vel non fluat, (β), novamque aequationem a Δu independentem sistat.

Casum priorem (α) ut saltem pro una forma ipsius Δ perscrutemur, supponamus

$$\Delta = \partial_\alpha\partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta.$$

Tum $\Delta\Lambda u$ ope aequationis $\Delta u = 0$ ad expressionem reduci potest, quae solas derivationes secundam alteram utram variabilem contineat et coefficientes omnes cifrae aequales habere debeat. Ponamus, quum terminis $\partial_\alpha \partial_\beta$ continens ope aequationis $\Delta u = 0$ ejeci possit,

$$\Lambda = a\,\partial_\alpha^2 + b\,\partial_\beta^2 + c\,\partial_\alpha + d\,\partial_\beta$$

formemusque expressionem

$$\Delta\Lambda - \Lambda\Delta.$$

In hac expressione quum coefficientes ipsarum ∂_α^2, ∂_β^2 evanescere debeant, invenitur $\dfrac{\partial a}{\partial \beta} = 0$, $\dfrac{\partial b}{\partial \alpha} = 0$, unde si casus speciales $a = 0$, $b = 0$ excluduntur, mutatis variabilibus independentibus effici potest, ut sit $a = b = 1$. Tum autem invenitur ponendo coefficientes ipsarum ∂_α^2, ∂_β^2 in expressione reducta $\Delta\Lambda$ cifrae aequales

$$\frac{\partial c}{\partial \beta} = 2\frac{\partial e}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial d}{\partial \alpha} = 2\frac{\partial f}{\partial \beta},$$

unde poni potest

$$\begin{aligned} \Delta &= \partial_\alpha \partial_\beta + \frac{\partial m}{\partial \beta}\,\partial_\alpha + \frac{\partial n}{\partial \alpha}\,\partial_\beta \\ \Lambda &= \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2 + 2\frac{\partial m}{\partial \alpha}\,\partial_\alpha + 2\frac{\partial n}{\partial \beta}\,\partial_\beta \end{aligned}$$

denotantibus m, n functiones ipsarum α, β, quae jam duabus aequationibus differentialibus sufficere debent, ut coefficientes ipsarum ∂_α, ∂_β in expressione reducta $\Delta\Lambda$ evanescant.

Prorsus simili modo in reliquis casibus specialibus formae simplicissimae ipsarum Δ et Λ inveniuntur conditioni

$$\Delta\Lambda = \Theta\Delta$$

satisfacientes. Sed huic disquisitioni prolixiori quam difficiliori hic non immoramur.

Caeterum patet in hoc casu temperaturam semper a γ independentem manere, si temperatura initialis est functio quaelibet ipsarum α et β aequationi $\Delta u = 0$ satisfaciens, sequitur enim ex aequationibus

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ \Lambda u &= \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

$0 = \Theta\Delta u = \Delta\Lambda u = \Delta\partial_t u = \dfrac{\partial \Delta u}{\partial t}$ et proin aequatio $\Delta u = 0$ subsistere pergit, si initio valet et functio u secundum aequationem $\Lambda u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ variatur. Tum autem satisfit legi motus caloris sive aequationi $F = 0$.

5.

Restat casus specialis alter (β) quando $\Delta\Lambda u = 0$ a $\Delta u = 0$ est independens. Ut simul et casus sequentes $m = 3$, $m = 4$ amplectemur, suppositionem generaliorem examinemus, praeter aequationem $\Delta u = 0$ haberi aequationem differentialem quamlibet linearem $\Theta u = 0$, ipsum $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ non continentem et a $\Delta u = 0$ independentem.

Si Δ est formae $\partial_\alpha \partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta$, ope aequationis $\Delta u = 0$ expressio Θ a derivationibus secundum ambas variabiles liberari potest.

Iam duo distinguendi sunt casus.

Si ex expressione Θ omnes quotientes differentiales secundum alteram utram variabilem ex. gr. secundum β simul excidunt, obtinetur aequatio differentialis solos quotientes differentiales secundum α continens formae

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial \alpha^\nu} = 0, \tag{1}$$

sin minus, semper elici poterit aequatio differentialis formae

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = 0 \tag{2}$$

sive solos quotientes differentiales secundum t continens.

Nam in hoc casu expressiones $\Lambda u, \Lambda^2 u, \Lambda^3 u, \ldots$, quibus quotientes differentiales ipsius u secundum t aequales sunt, ope aequationium $\Delta u = 0$, $\Theta u = 0$ semper ita transformari possunt, ut solos quotientes differentiales secundum alteram utram variabilem contineant eosque non altiores quam Θu. Quorum numerus quum sit finitus, eliminando aequationem formae (2) obtineri posse manifestum est. Coefficientes a_ν utriusque aequationis sunt functiones ipsarum α, β.

Observare conveniet, alteram utram harum aequationum semper valere etiamsi Δ non st formae $\partial_\alpha \partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta$. Casus specialis, quando $\Delta = \partial_\alpha^2 + e\partial_\alpha + f\partial_\beta$ ad utrumque casum referri potest, quum ope aequationis $\Delta u = 0$ tum ex Θu, tum ex Λu omnes derivationes secundam β ejici possint, quo facto aequatio utriusque formae facile obtinetur. Si $f = 0$, hic casus sicuti casus $\Delta = \partial_\alpha$ ad casum priorem referendus est.

Iam casum posteriorem accuratius perscrutemur.

Solutionem generalem aequationis

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = 0$$

e teminis formae $f(t)e^{\lambda t}$ conflatam esse constat, denotante $f(t)$ functionem integram ipsius t et λ quantitatem a t non pendentem, facileque perspicitur hos terminos singulos aequationi (I) satisfacere debere. Iam demonstrabimus fieri non posse, ut sit λ functio ipsarum x_1, x_2, x_3.

Sit kt^n terminus summus functionis $f(t)$ distinguanturque duo casus.

1°. Quando λ aut realis est aut formae $\mu + \nu i$ et μ, ν functiones unius variabilis realis α ipsarum x_1, x_2, x_3, substituendo $u = f(t)e^{\lambda t}$ in parte laeva aequationis (I) coefficiens ipsius $t^{n+2}e^{\lambda t}$ invenitur

$$= k\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\right)^2 \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'} \frac{\partial\alpha}{\partial x_\iota}\frac{\partial\alpha}{\partial x_{\iota'}}.$$

Sed haec quantitas evanescere nequit, nisi

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_3} = 0$$

sive $\alpha = \text{const.}$, quum forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}, & a_{2,2}, & a_{3,3} \\ a_{2,3}, & a_{3,1}, & a_{1,2} \end{pmatrix}$$

ut supra monuimus, sit forma positiva.

2°. Quando λ est formae $\mu + \nu i$ et μ, ν sunt functiones independentes ipsarum x_1, x_2, x_3, quantitates $\mu + \nu i$ et $\mu - \nu i$ pro variabilibus independentibus α et β sumi poterunt continebitque ipsum u praeter terminum $f(t)e^{\alpha t}$ etiam terminum complexum conjugatum $\varphi(t)e^{\beta t}$. Quodsi

$$\Delta u = a\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + c\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + e\frac{\partial u}{\partial\alpha} + f\frac{\partial u}{\partial\beta}$$

est, ex aequatione $\Delta u = 0$ substituendo $u = f(t)e^{\alpha t}$ et aequando coefficientem ipsius $t^{n+2}e^{\alpha t}$ cifrae, obtinetur $\alpha = 0$ et perinde $c = 0$ substituendo $u = \varphi(t)e^{\beta t}$. Unde ope aequationis $\Delta u = 0$ aequatio $\Lambda u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ ita transformari potest, ut solos quotientes differentiales secundum alteram utram variabilem contineat. Sed substituendo

$$u = f(t)e^{\alpha t}, \quad u = \varphi(t)e^{\beta t}$$

coefficiens summi cujusque horum quotientium differentialium invenitur $= 0$, unde et hi quotientes differentiales ex aequatione $\Lambda u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ omnes excidere debent, q. e. a., quum u ex hyp. non sit constans.

In casu igitur posteriori functio u componitur e numero finito terminorum formae $f(t)e^{\lambda t}$ in quibus λ est constans et $f(t)$ functio integra ipsius t.

In casu priori quando habetur aequatio formae

$$\sum_{\nu} a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial \alpha^\nu} = 0, \tag{1}$$

functio u erit formae

$$u = \sum_{\nu} q_\nu p_\nu,$$

denotantibus $p_1, p_2, \dots$ solutiones particulares aequationis (1) et $q_1, q_2, \dots$ constantes arbitrarias sive functiones solarum β et t. Quodsi haec expressio in aequatione

$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

substituitur, obtinetur aequatio formae

$$\sum PQ = 0,$$

in qua quantitates Q sunt quotientes differentiales ipsarum q ideoque functiones solarum β et t, quantitates P autem functiones solarum α et β. At tali aequationi supra vidimus, si ex n terminis componatur, subjacere μ aequationes lineares inter functiones Q et $n - \mu$ aequationes inter functiones P, quarum coefficientes sint functiones solius β, denotante μ quempiam numerorum $0, 1, 2, \dots, n$. Obtinebuntur igitur expressiones ipsarum $\frac{\partial q}{\partial t}$ per quotientes differentiales ipsarum q secundum β ab ipsa α liberae.

Iam casus singulos problematis nostri ad hunc casum pertinentes perlustremus.

Quando $m = 2$ et Δ est formae $\partial_\alpha \partial_\beta + e\partial_\alpha + f\partial_\beta$, aequatio reducta $\Delta\Lambda u = 0$, si a quotientibus differentialibus secundum β libera evadit, formam induet:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} + r\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + s\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0,$$

unde u erit formae

$$ap + bq + c,$$

denotantibus a, b, c functiones solarum β et t, p et q autem functiones solarum α et β. Iam in locum ipsius α variabilis independens q introduci potest. Quo pacto obtinetur

$$u = ap + b\alpha + c,$$

ubi jam sola p est functio ambarum variabilium α et β. Substituendo hanc expressionem in aequationibus

$$\Delta u = 0, \quad \Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

coefficientium formae facile eruuntur.

Restat casus quando jam una aequationeum, in quas aequatio $F = 0$ discinditur, formam (1) habet, ideoque formam

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + s\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

Tum erit $u = ap + b$, denotantibus a et b functiones solarum β et t et p functionem solarum α et β. Si in locum ipsius α variabilis independens p introducitur, prodibit

$$u = a\alpha + b, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Invenimus igitur, si m sit $= 2$ sive aequatio $F = 0$ in duas aequationes

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ \Lambda u &= \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

dissolvatur, esse aut $\Delta\Lambda = \Theta\Delta$, aut functionem u compositaum esse e numero finito terminorum formae $f(t)e^{\lambda t}$, in quibus λ constans et $f(t)$ functio integra ipsius t est, aut formam induere

$$\varphi(\beta, t)\chi(\alpha, \beta) + \alpha\varphi_1(\beta, t) + \varphi_2(\beta, t),$$

sit $m = 3$, functionem u aut esse e numero finito terminorum $f(t)e^{\lambda t}$ conflatam aut formae

$$\varphi(\beta, t)\alpha + \varphi_1(\beta, t).$$

Casus denique $m = 4$ nullo negotio penitus absolvi potest.

Si enim praeter aequationem $\Lambda u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ habentur tres aequationes inter

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

aut prodibit aequatio formae

$$r\frac{\partial u}{\partial \alpha} + s\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0$$

et proin variabiles independentes ita eligere licebit, ut u fiat functio unius tantum variabilis, aut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2},$$

ideoque etiam Λu, $\Lambda^2 u$, $\Lambda^3 u$ per $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial \beta}$ exprimi poterunt. Tum autem emerget aequatio formae

$$a\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

unde u habebit formam

$$pe^{\lambda t} + qe^{\mu t} + r \operatorname{vel} (p + qt)e^{\lambda t} + r$$

constatque per praecedentia λ et μ esse constantes.

Iam sumta p pro variabili independente α et substitutis his expressionibus in aequatione $\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$ invenitur fieri non posse, ut q sit functio ipsius α, siquidem λ et μ sint inaequales. Ergo p et q vice variabilium independentium fungi possunt. Praeterea ex aequatione $\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}$ invenitur $r = \text{const.}$

In hoc igitur casu u aut est functio ipsius t et unius tantum variabilis, aut alteram utram formarum

$$\alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t} + \text{const.}, \quad (\alpha + \beta t)e^{\lambda t} + \text{const.}$$

induet, valore $\mu = 0$ non excluso.

Postquam formae quas functio u induere potest inventae sunt, aequationes $F_\nu = 0$, quas brevitati consulentes perscribere noluimus, facillimae sunt formatu. Unde in singulis quibusque casibus et forma

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}, & b_{2,2}, & b_{3,3} \\ b_{2,3}, & b_{3,1}, & b_{1,2} \end{pmatrix}$$

et forma adjuncta

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1}, & \beta_{2,2}, & \beta_{3,3} \\ \beta_{2,3}, & \beta_{3,1}, & \beta_{1,2} \end{pmatrix}$$

innotescet. Si jam in expressionibus $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ in locos quantitatum s_1, s_2, s_3 functiones quaelibet ipsarum x_1, x_2, x_3 substituuntur, manifesto obtinebuntur casus omnes, in quibus u functio temporis et duarum tantum varaibilium fieri possit. Unde quaestio prior soluta erit.

Superest ut quaeramus, quando expressio $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ in formam datum $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$ transformari possit.

Pars secunda.

De transformatione expressionis $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ in formam datum $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$.

Quum quaestio ab Ill$^{\text{ma}}$ Academia ad corpora homogenea restricta sit, in quibus conductibilitates resultantes sint constantes, evolvamus primum conditiones, ut expressio $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$, aequando quantitates s functionibus ipsarum x, in formam $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$, constantibus coefficientibus $a_{\iota,\iota'}$ affectam transformari possit. Deinde de transformatione in formam quamlibet datam pauca adjeciemus.

Expressionem $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$, si est, id quod supponimus, forma positive ipsarum dx, semper in formam $\sum\limits_\iota dx_\iota^2$ redigi posse constat. Unde si $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ in formam $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$ transformari potest, redigi etiam potest in formam $\sum\limits_\iota dx_\iota^2$ et vice versa. Quaeramus igitur, quando in formam $\sum\limits_\iota dx_\iota^2$ transformari possit.

Sit determinans $\sum \pm b_{1,1} b_{2,2} \dots b_{n,n} = B$ et determinantes partiales $= \beta_{\iota,\iota'}$; quo pacto erit $\sum\limits_\iota \beta_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'} = B$ et $\sum\limits_\iota \beta_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota''} = 0$, si $i' \gtrless i''$.

Si $\sum\limits_{\iota,\iota'} \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'} = \sum\limits_\iota dx_\iota^2$ pro valoribus quibuslibet ipsarum dx, substituendo $d+\delta$ pro d invenitur etiam $\sum\limits_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, \delta s_{\iota'} = \sum dx_\iota\, \delta x_\iota$ pro valoribus quibuslibet ipsarum dx et δx.

Hinc si quantitates ds_ι per dx_ι et quantitates δx_ι per quantitates δs_ι exprimuntur, sequitur

$$\frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu} = \sum_\iota b_{\nu,\iota} \frac{\partial s_\iota}{\partial x_{\nu'}} \tag{1}$$

et proinde

$$\frac{\partial s_\iota}{\partial x_{\nu'}} = \sum_\nu \frac{\beta_{\nu,\iota}}{B} \frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu}. \tag{2}$$

Unde porro deducitur, quoniam sit

$$\sum_\nu \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_\nu \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_{\iota'}} = 0, \text{ si } \iota \gtrless \iota',$$

$$\sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_{\iota'}} = b_{\iota,\iota'}, \tag{3}$$

$$\sum_\nu \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu}\frac{\partial s_{\iota'}}{\partial x_\nu} = \frac{\beta_{\iota,\iota'}}{B} \tag{4}$$

et differentiando formulam (3)

$$(4)\qquad \sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_\iota\,\partial s_{\iota''}}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_{\iota'}} + \sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota''}}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota} = \frac{\partial b_{\iota,\iota'}}{\partial s_{\iota''}}.$$

Iam ex his ipsarum

$$\frac{\partial b_{\iota,\iota'}}{\partial s_{\iota''}},\quad \frac{\partial b_{\iota,\iota''}}{\partial s_{\iota'}},\quad \frac{\partial b_{\iota',\iota''}}{\partial s_\iota},$$

expressionibus eruitur

$$(5)\qquad 2\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota''}}\frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota} = \frac{\partial b_{\iota,\iota'}}{\partial s_{\iota''}} + \frac{\partial b_{\iota,\iota''}}{\partial s_{\iota'}} - \frac{\partial b_{\iota',\iota''}}{\partial s_\iota}$$

et si haec quantitas per $p_{\iota,\iota',\iota''}$ designatur

$$(6)\qquad 2\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota''}} = \sum_\iota \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu} p_{\iota,\iota',\iota''}.$$

Quantitatibus $p_{\iota,\iota',\iota''}$ iterum differentiatis obtinetur

$$\frac{\partial p_{\iota,\iota',\iota''}}{\partial s_{\iota'''}} - \frac{\partial p_{\iota,\iota',\iota'''}}{\partial s_{\iota''}} = 2\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota''}}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_\iota\,\partial s_{\iota'''}} - 2\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota'''}}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_\iota\,\partial s_{\iota''}},$$

unde tandem prodit, substitutis valoribus modo inventis (6) et (4)

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 b_{\iota,\iota''}}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 b_{\iota',\iota'''}}{\partial s_\iota\,\partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota,\iota'''}}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota',\iota''}}{\partial s_\iota\,\partial s_{\iota'''}} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\sum_{\nu,\nu'} (p_{\nu,\iota',\iota'''}p_{\nu',\iota,\iota''} - p_{\nu,\iota,\iota'''}p_{\nu',\iota',\iota''})\frac{\beta_{\nu,\nu'}}{B} \quad = 0. \end{aligned}$$

Hujus modi igitur aequationibus functiones b satisfaciant necesse est, quando $\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}$ in formam $\sum\limits_\iota dx_\iota^2$ transformari potest: partes laevas harum aequationum designabimus per

$$(\iota\iota', \iota''\iota''').$$

Ut indoles harum aequationum melius perspiciatur, formetur expressio

$$\delta\delta\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'} - 2d\delta\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,\delta s_{\iota'} + dd\sum b_{\iota,\iota'}\,\delta s_\iota\,\delta s_{\iota'}$$

determinatis variationibus secundi ordinis d^2, $d\delta$, δ^2 ita, ut sit

$$\delta'\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'} - \delta\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,\delta' s_{\iota'} - d\sum b_{\iota,\iota'}\,\delta s_\iota\,\delta' s_{\iota'} = 0,$$

$$\delta' \sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'} - 2d \sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, \delta' s_{\iota'} = 0,$$
$$\delta' \sum b_{\iota,\iota'}\, \delta s_\iota\, \delta s_{\iota'} - 2\delta \sum b_{\iota,\iota'}\, \delta s_\iota\, \delta' s_{\iota'} = 0,$$

denotante δ' variationem quamcunque. Quo pacto haec expressio invenietur

$$\text{(II)} \qquad = (\iota\iota', \iota''\iota''')(ds_\iota\, \delta s_{\iota'} - ds_{\iota'}\, \delta s_\iota)(ds_{\iota''}\, \delta s_{\iota'''} - ds_{\iota'''}\, \delta s_{\iota''}).$$

Iam ex hac formatione hujus expressionis sponte patet, mutatis variabilibus independentibus transmutari eam in expressionem a nova forma ipsius $\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ eadem lege dependentem. At si quantitates b sunt constantes, omnes coefficientes expressionis (II) cifrae aequales evadunt. Unde si $\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ in expressionem similem constantibus coefficientibus affectam transformari potest, expressio (II) identice evanescent necesse est.

Perinde patet, si expressio (II) non evanescat, expressionem

$$\text{(III)} \qquad -\tfrac{1}{2}\frac{\sum(\iota\iota', \iota''\iota''')(ds_\iota\, \delta s_{\iota'} - ds_{\iota'}\, \delta s_\iota)(ds_{\iota''}\, \delta s_{\iota'''} - ds_{\iota'''}\, \delta s_{\iota''})}{\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'} \sum b_{\iota,\iota'}\, \delta s_\iota\, \delta s_{\iota'} - \left(\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, \delta s_{\iota'}\right)^2}$$

mutatis variabilibus independentibus non mutari, insuperque immutatam maneri, si in locos variationum ds_ι, δs_ι expressiones ipsarum lineares quaelibet independentes $\alpha\, ds_\iota + \beta\, \delta s_\iota$, $\gamma\, ds_\iota + \delta\, \delta s_\iota$ substituantur. Valores autem maximi et minimi hujus functionis (III) ipsarum ds_ι, δs_ι neque a forma expressionis $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ neque a valoribus variationum ds_ι, δs_ι pendebunt, unde ex his valoribus dignosci poterit, an duae hujusmodi expressiones in se transformari possint.

Disquisitiones haece interpretione quadam geometrica illustrari possunt, quae quamquam conceptibus inusitatis nitatur, tamen obiter eam addigitavisse juvabit.

Expressio $\sqrt{\sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}}$ spectari potest tanquam elementum lineare in spatio generaliore n dimensionum nostrum intuitum transcendente. Quodsi in hoc spatio a puncto $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ducantur omnes lineae brevissimae, in quarum elementis initialibus variationes ipsarum s sunt ut

$$\alpha\, ds_1 + \beta\delta s_1 : \alpha\, ds_2 + \beta\delta s_2 : \ \ldots\ : \alpha\, ds_n + \beta\delta s_n,$$

denotantibus α et β quantitates quaslibet, hae lineae superficiem constituent, quam in spatium vulgare nostro intuitui subjectum evolvere licet. Quo pacto expressio (III) erit mensura curvaturae hujus superficiei in puncto $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Si jam ad casum $n = 3$ redimus, expressio (II) est forma secundi gradus ipsarum

$$ds_2\,\delta s_3 - ds_3\,\delta s_2, \quad ds_3\,\delta s_1 - ds_1\,\delta s_3, \quad ds_1\,\delta s_2 - ds_2\,\delta s_1,$$

unde in hoc casu sex obtinemus aequationes, quibus functiones b satisfacere debent, ut $\sum \beta_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}$ in formam constantibus coefficientibus gaudentem transformari possit. Nec difficile, ope notionum modo traditarum, est demonstratu, has sex conditiones, ut hoc fieri possit, sufficere. Observandum tamen est ternas tantum esse a se independentes.

Iam ut quaestionem ab Ill$^{\text{ma}}$ Academia propositam persolvamus, in his sex aequationibus formae functionum b, methodo supra exposita inventae, sunt substituendae, quo pacto omnes casus invenientur, in quibus temperatura u in corporis homogeneis functio temporis et duarum tantum variabilium fieri possit.

Sed angustia temporis non permisit hos calculos perscribere. Contenti igitur esse debemus, postquam methodos quibus usi sumus exposuimus, solutiones singulas quaestionis propositae enumerasse.

Si brevitatis causa casum simplicissimum, quando temperatura u secundum legem

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = aa\frac{\partial u}{\partial t}$$

variatur, solum respicimus, ad quem casus reliquos facile reduci posse constat: casus $m = 1$ tum tantum evenire potest, quando u est constans aut in lineis rectis parallelis, aut in circulis helicibusve, ita ut coordinatis rectangularibus z, $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$ rite electis, poni possit $\alpha = r$, $\beta = z + \varphi\,.\,\text{const.}$

Casus $m = 2$ locum inveniet si $u = f(\alpha) + \varphi(\beta)$, casus $m = 3$ si $u = \alpha e^{\lambda t} + f(\beta)$, denotante λ constantem realem, casus denique $m = 4$, ut jam supra invenimus, si u est aut $= \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t} + \text{const.}$, aut $= (\alpha + \beta t)e^{\lambda t} + \text{const.}$, aut $= f(\alpha)$.

Iam ut formae functionis u penitus innotescant, annotari tantum opus est, temperaturam u, nisi sit formae $\alpha e^{\lambda t}$, tum tantum functionem temporis et unius variabilis esse posse, quando sit constans aut in planis parallelis, aut in cylindris eadem axi gaudentibus, aut in sphaeris concentricis. Si u est formae $\alpha e^{\lambda t}$, ex aequatione differentiali (I) sequitur

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_3^2} = \lambda aa\alpha$$

et perinde in casu quarto substituendo valores ipsius u in aequatione differentiali (I), functiones α et β facile determinantur, dummodo animadvertas, in hoc casu $\alpha e^{\lambda t}$ et $\beta e^{\mu t}$ esse posse quantitates complexas conjugatas.