Ein Beitrag zur Elektrodynamik.

Bernhard Riemann

[Annalen der Physik und Chemie. Bd. 131.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Ein Beitrag zur Elektrodynamik.

Bernhard Riemann

[Annalen der Physik und Chemie. Bd. 131.]

Der Königlichen Societät erlaube ich mir eine Bemerkung mitzutheilen, welche die Theorie der Elektricität und des Magnetismus mit der des Lichts und der strahlenden Wärme in einen nahen Zusammenhang bringt. Ich habe gefunden, dass die elektrodynamischen Wirkungen galvanischer Ströme sich erklären lassen, wenn man annimmt, dass die Wirkung einer elektrischen Masse auf die übrigen nicht momentan geschieht, sondern sich mit einer constanten (der Lichtgeschwindigkeit innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler gleichen) Geschwindigkeit zu ihnen fortpflanzt. Die Differentialgleichung für die Fortpflanzung der elektrischen Kraft wird bei dieser Annahme dieselbe, wie die für die Fortpflanzung des Lichts und der strahlenden Wärme.

Es seien S und S' zwei von constanten galvanischen Strömen durchflossene und gegen einander nicht bewegte Leiter, ε sei ein elektrisches Massentheilschen im Leiter S, welches sich zur Zeit t im Punkte (x, y, z) befinde, ε' ein elektrisches Massentheilchen von S' und befinde sich zur Zeit t im Punkte (x', y', z'). Ueber die Bewegung der elektrischen Massentheilchen, welche in jedem Leitertheilchen für die positiv und negativ elektrischen entgegengesetzt ist, mache ich die Voraussetzung, dass sie in jedem Augenblicke so vertheilt sind, dass die Summen

$$\sum \varepsilon f(x, y, z), \quad \sum \varepsilon' f(x', y', z'),$$

über sämmtliche Massentheilchen der Leiter ausgedehnt gegen dieselben Summen, wenn sie nur über die positiv elektrischen oder nur über die negativ elektrischen Massentheilchen ausgedehnt werden, vernachlässigt werden dürfen, sobald die Function f und ihre Differentialquotienten stetig sind.

Diese Voraussetzung kann auf sehr mannigfaltige Weise erfüllt werden. Nimmt man z. B. an, dass die Leiter in den kleinsten Theilen krystallinisch sind, so dass sich dieselbe relative Vertheilung der Elektricitäten in bestimmten gegen die Dimensionen der Leiter unendlich kleinen Abständen periodisch wiederholt, so sind, wenn β die Länge einer solchen Periode bezeichnet, jene

Summen unendlich klein, wie $c\beta^n$, wenn f und ihre Derivirten bis zur $(n-1)$-ten Ordnung stetig sind, und unendlich klein wie $e^{-\frac{c}{\beta}}$, wenn sie sämmtlich stetig sind.

Erfahrungsmässiges Gesetz der elektrodynamischen Wirkungen.

Sind die specifischen Stromintensitäten nach mechanischem Mass zur Zeit t im Punkte (x,y,z) parallel den drei Axen u, v, w, und im Punkte (x',y',z') u', v', w', und bezeichnet r die Entfernung beider Punkte, c die von *Kohlrausch* und *Weber* bestimmte Constante, so ist der Erfahrung nach das Potential der von S auf S' ausgeübten Kräfte

$$-\frac{2}{cc}\iint \frac{uu'+vv'+ww'}{r}\,dS\,dS',$$

dieses Integral über sämmtliche Elemente dS und dS' der Leiter S und S' ausgedehnt. Führt man statt der specifischen Stromintensitäten die Producte aus den Geschwindigkeiten in die specifischen Dichtigkeiten und dann für die Producte aus diesen in die Volumelemente die in ihnen enthalten Massen ein, so geht dieser Ausdruck über in

$$\sum\sum \frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc}\frac{1}{r}\frac{dd'(r^2)}{dt\,dt},$$

wenn die Aenderung von r^2 während der Zeit dt, welche von der Bewegung von ε herrührt, durch d, und die von der Bewegung von ε' herrührende durch d' bezeichnet wird.

Dieser Ausdruck kann durch Hinwegnahme von

$$\frac{d\sum\sum \frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc}\frac{1}{r}\frac{d'(r^2)}{dt}}{dt},$$

welches durch die Summirung nach ε verschwindet, in

$$-\sum\sum \frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}\frac{d'(r^2)}{dt}$$

und dieses wieder durch Addition von

$$\frac{d'\sum\sum \frac{\varepsilon\varepsilon'}{cc}rr\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}}{dt},$$

welches durch die Summation nach ε' Null wird, in

$$\sum\sum \varepsilon\varepsilon'\frac{rr}{cc}\frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{dt\,dt}$$

verwandelt werden.

Ableitung dieses Gesetzes aus der neuen Theorie.

Nach der bisherigen Annahme über die elektrostatische Wirkung wird die Potentialfunction U beliebig vertheilter elektrischer Massen, wenn ϱ ihre Dichtigkeit im Punkte (x, y, z) bezeichnet, durch die Bedingung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 4\pi\varrho = 0,$$

und durch die Bedingung, dass U stetig und in unendlicher Entfernung von wirkenden Massen constant sei, bestimmt. Ein particulares Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

welches überall ausser dem Punkte (x', y', z') stetig bleibt, ist

$$\frac{f(t)}{r}$$

und diese Function bildet die von Punkte (x', y', z') aus erzeugte Potentialfunction, wenn sich in demselben zur Zeit t die Masse $-f(t)$ befindet.

Statt dessen nehme ich nun an, dass die Potentialfunction U durch die Bedingung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \alpha\alpha\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + \alpha\alpha\, 4\pi\varrho = 0$$

bestimmt wird, so dass die vom Punkte (x', y', z') aus erzeugte Potentialfunction, wenn sich in demselben zur Zeit t die Masse $-f(t)$ befindet,

$$= \frac{f\left(t - \dfrac{r}{\alpha}\right)}{r}$$

wird.

Bezeichnet man die Coordinaten der Masse ε zur Zeit t durch x_t, y_t, z_t, und die Masse ε' zur Zeit t' durch $x'_{t'}$, $y'_{t'}$, $z'_{t'}$, und setzt zur Abkürzung

$$\left((x_t - x'_{t'})^2 + (y_t - y'_{t'})^2 + (z_t - z'_{t'})^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r(t, t')} = F(t, t'),$$

so wird nach dieser Annahme das Potential von ε auf ε' zur Zeit t

$$= -\varepsilon\varepsilon' F\left(t - \frac{r}{\alpha}, t\right).$$

Das Potential der von sämmtlichen Massen ε des Leiters S auf die Massen ε' des Leiters S' von der Zeit 0 bis zur Zeit t ausgeübten Kräfte wird daher

$$P = -\int_0^t \sum\sum \varepsilon\varepsilon' F\left(t - \frac{r}{\alpha}, \tau\right) d\tau,$$

die Summen über sämmtliche Massen beider Leiter ausgedehnt.

Da die Bewegung für entgegengesetzt elektrische Massen in jedem Leitertheilchen entgegengesetzt ist, so erlangt die Function $F(t, t')$ durch die Derivation nach t die Eigenschaft, mit ε, und durch die Derivation nach t' die Eigenschaft, mit ε' ihr Zeichen zu ändern. Bei der vorausgesetzten Vertheilung der Elektricitäten wird daher, wenn man die Derivationen nach t durch obere und nach t' durch untere Accente bezeichnet, $\sum\sum \varepsilon\varepsilon' F_{n'}^{(n)}(\tau, \tau)$, über sämmtliche elektrische Massen ausgedehnt, nur dann nicht unendlich klein gegen die über die elektrischen Massen einer Art erstreckte Summe, wenn n und n' beide ungerade sind.

Man nehme nun an, dass die elektrischen Massen während der Fortpflanzungszeit der Kraft von einem Leiter zum anderen nur einen sehr kleinen Weg zurücklegen, und betrachte die Wirkung während eines Zeitraums, gegen welchen die Fortpflanzungszeit verschwindet. In dem Ausdrucke von P kann man dann zunächst

$$F\left(\tau - \frac{r}{\alpha}, \tau\right)$$

durch

$$F\left(\tau - \frac{r}{\alpha}, \tau\right) - F(\tau, \tau) = -\int_0^{\frac{r}{\alpha}} F'(\tau - \sigma, \tau)\, d\sigma$$

ersetzen, da $\sum\sum \varepsilon\varepsilon' F(\tau, \tau)$ vernachlässigt werden darf. Man erhält dadurch

$$P = \int_0^t d\tau \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} F'(\tau - \sigma, \tau)\, d\sigma,$$

oder wenn man die Ordnung der Integration umkehrt und $\tau + \sigma$ für τ setzt,

$$P = \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma \int_{-\sigma}^{t-\sigma} d\tau\, F'(\tau, \tau + \sigma).$$

Verwandelt man die Grenzen des innern Integrals in 0 und t, so wird dadurch an der obern Grenze der Ausdruck

$$H(t) = \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma \int_{-\sigma}^{0} d\tau\, F'(t + \tau, t + \tau + \sigma)$$

hinzugefügt, und an der untern Grenze der Werth dieses Ausdrucks für $t = 0$ hinweggenommen. Man hat also

$$P = \int_0^t d\tau \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{r}{\alpha}} d\sigma\, F'(\tau, \tau+\sigma) - H(t) + H(0).$$

In diesem Ausdruck kann man $F'(\tau, \tau+\sigma)$ durch $F'(\tau, \tau+\sigma) - F'(\tau, \tau)$ ersetzen, da

$$\sum\sum \varepsilon\varepsilon' \frac{r}{\alpha} F'(\tau, \tau)$$

vernachlässigt werden darf. Man erhält dadurch als Factor von $\varepsilon\varepsilon'$ einen Ausdruck, der sowohl mit ε als mit ε' sein Zeichen ändert, so dass sich bei den Summationen die Glieder nicht gegen einander aufheben, und unendlich kleine Bruchtheile der einzelnen Glieder vernachlässigt werden dürfen. Es ergiebt sich daher, indem man

$$F'(\tau, \tau+\sigma) - F'(\tau, \tau) \text{ durch } \sigma \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{d\tau\, d\tau}$$

ersetzt und die Integration nach σ ausführt, bis auf einen zu vernachlässigenden Bruchteil

$$P = \int_0^t \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \frac{rr}{2\alpha\alpha} \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{d\tau\, d\tau} d\tau - H(t) + H(0).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $H(t)$ und $H(0)$ vernachlässigt werden dürfen; denn es ist

$$F'(t+\tau, t+\tau+\sigma) = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dt^2}\tau + \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{dt^2}(\tau+\sigma) + \cdots,$$

folglich:

$$H(t) = \sum\sum \varepsilon\varepsilon' \left(\frac{rr}{2\alpha\alpha} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} - \frac{r^3}{6\alpha^3} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dt^2} + \frac{r^3}{6\alpha^3} \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{dt\, dt} + \cdots \right).$$

Hierin aber ist nur das erste Glied des Factors von $\varepsilon\varepsilon'$ mit dem Factor in dem ersten Bestandtheile von P von gleicher Ordnung, und dieses liefert wegen der Summation nach ε' nur einen zu vernachlässigenden Bruchtheil desselben.

Der Werth von P, welcher sich aus unserer Theorie ergiebt, stimmt mit dem erfahrungsmässigen

$$P = \int_0^t \sum \sum \varepsilon\varepsilon' \frac{rr}{cc} \frac{dd'\left(\frac{1}{r}\right)}{d\tau\, d\tau}\, d\tau$$

überein, wenn man $\alpha\alpha = \frac{1}{2}cc$ annimmt.

Nach der Bestimmung von *Weber* und *Kohlrausch* ist

$$c = 439450 \cdot 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}},$$

woraus sich α zu 41949 geographischen Meilen in der Secunde ergiebt, während für die Lichtgeschwindigkeit von *Busch* aus *Bradley*'s Aberrationsbeobachtungen 41994 Meilen, und von *Fizeau* durch directe Messung 41882 Meilen gefunden worden sind.