Estratto di una lettera scritta in lingua Italiana il dì 21 Gennaio 1864 al Sig. Professore Enrico Betti.

Bernhard Riemann

[Annali di Matematica, Ser. 1, T. VII., pp. 281–283.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Estratto di una lettera scritta in lingua Italiana il dì 21 Gennaio 1864 al Sig. Professore Enrico Betti.

Bernhard Riemann

[Annali di Matematica, Ser. 1, T. VII., pp. 281–283.]

Carissimo Amico

... Per trovare l'attrazione di un cilindro omogeneo retto ellisoidale qualunque, io considero, introducendo coordinate rettangolari x, y, z, il cilindro infinito limitato della diseguaglianza:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0$$

ripieno di massa di densità costante $+1$, se $z < 0$, e di densità -1, se $z > 0$. Allora se poniamo, come è solito, il potenziale nel punto x, y, z eguale a V e:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z,$$

si ha per $z = 0$, $V = 0$, $X = 0$, $Y = 0$.

Z è eguale al potenziale dell'ellisse:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0$$

colla densità 2, e si trova col metodo di *Dirichlet*, se denotiomo con σ la radice maggiore dell'equazione:

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{s} = F = 0,$$

e

$$\sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right) s}$$

con D:

$$4\int_\sigma^\infty \frac{\sqrt{F}\,ds}{D}.$$

X ed Y si possono determinare dalle equazioni:

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

e dalle condizioni:

$$X = 0, \quad Y = 0$$

per $z = 0$.

Per effettuare questa determinazione conviene di sostituire invece di $4\int_\sigma^\infty$, $2\int_\infty^\infty$ esteso per il contorno intero di un pezzo del Piano degli s, che contiene il valore σ senza contenere verun altro valore di diramazione o di discontinuità della funzione sotto il segno integrale. Se denotiamo le radici di $F = 0$ in ordine di grandezza con σ, σ', σ'' questi valori sono tutti reali e in ordine di grandezza:

$$\sigma, \quad 0, \quad \sigma', \quad -b^2, \quad \sigma'', \quad -a^2,$$

in modo che:

$$\sigma > 0 > \sigma' > -b^2 > \sigma'' > -a^2.$$

Posto:

$$F = t - \frac{z^2}{s},$$

viene

$$Z = 2\int_\infty^\infty \frac{\sqrt{ts - z^2}}{D\sqrt{s}}\,ds,$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \int_\infty^\infty \frac{s\dfrac{\partial t}{\partial x}(ts - z^2)^{-\frac{1}{2}}}{D\sqrt{s}}\,ds;$$

ma:

$$\int_0^z (ts - z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz = \int_0^{\frac{z}{\sqrt{ts}}} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\xi = \int_0^{\frac{z}{\sqrt{ts}}} \left(\frac{1}{\xi^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} d\log\xi,$$

e:

$$\frac{s\dfrac{\partial t}{\partial x}\,ds}{D\sqrt{s}} = -2abx(a^2 + s)^{-\frac{3}{2}}(b^2 + s)^{-\frac{1}{2}}\,ds = \frac{4abx}{b^2 - a^2}\,d\sqrt{\frac{b^2 + s}{a^2 + s}}.$$

Dunque si trova per integrazione parziale:

$$X = \frac{2abxz}{b^2 - a^2} \int_{\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{b^2 + s}{a^2 + s}}\,(ts - z^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\log ts.$$

Se si prende la via dell' integrazione come nella espressione di Z il valore dell' integrale sodisfa sempre alla condizione:

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x};$$

ma può differire di funzioni di x e di y, la funzione sotto segno integrale essendo discontinua anche per $t = 0$. Dunque occorre una determinazione olteriore della via dell' integrazione.

Nella espressione di $\dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}$ la funzione sotto segno integrale è continua per $s = 0$; dunque il pezzo del piano degli s, per il cui contorno l'integrale è esteso, deve contenere $s = \sigma$ e può contenere o no $s = 0$, ma nessuno altro dei valori supra notati. Nella espressioni di X questo pezzo deve essere determinato in modo che X sia $= 0$ per $z = 0$: e affinchè ciò avvenga, dovendo contenere $s = \sigma$, deve anche contenere la maggiore radice di $ts = 0$ (la quale è la maggiore radice di $t = 0$, se

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0,$$

ed è $= 0$, se:

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0)$$

ma nessun altra radice di $ts = 0$. Perchè per $z = 0$ le radici di $F = 0$ coincidono colle radici di $ts = 0$, e se la via dell' integrazione passasse *tra* due valori di discontinuità che coincidono per $z = 0$, doverebbe per $z = 0$ passare per questo valore in modo che l'integrale nella espressione di X diverrebbe infinito ed il valore nonostante il fattore z rimarrebbe finito. . . .

Vostro aff$^{\text{mo}}$ Amico *Riemann.*