SUR UN MÉMOIRE DE M. PLANA

By

William Rowan Hamilton

(Correspondance Mathématique et Physique, tome 8 (1834), pp. 27–30.)

Transcribed by David R. Wilkins

1999

Remarques de M. Hamilton, Directeur de l'Observatoire de Dublin, sur un Mémoire de M. Plana inséré dans le Tome VII de la Correspondance Math. (Extrait d'une Lettre).

[*Correspondance Mathématique et Physique*, 8 (1834), pp. 27–30.]

Les recherches de M. Plana sur les rayons réfractés ne paraissent pas terminées dans la livraison* que j'ai vue; mais sa difficulté est clairement établie dans cette livraison pour le cas des rayons réfractés, et si on ne pouvait la vaincre pour ce cas important, elle serait une fatale objection contre le théorème des trajectoires othogonales. M. Plana, lui-même, paraît cependant regarder ce théorème comme vrai, et il soupçonne en conséquence qu'il y a dans son analyse quelque vice radical,† qu'il n'a pu reconnaître. S'il me fait l'honneur de lire les remarques suivantes, il sera convaincu, je crois, que ce soupçon n'est pas fondé, et que son analyse ne demande qu'à être poussée un peu plus loin, afin de démontrer le théorème avec lequel elle paraît en opposition.

M. Plana désigne par $x\ y\ z$, les coordonnées du point sur une surface réfléchissante

$$z = f(x, y), \quad dz = p\,dx + q\,dy,$$

où la surface est rencontrée par un rayon incident issu normalement d'un point $x'\ y'\ z'$ d'une certaine autre surface

$$z' = F(x', y'), \quad dz' = p'\,dx' + q'\,dy';$$

de manière qu'en désignant par r la portion interceptée de ce rayon, il a

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \tag{II}$$

et

$$\left.\begin{aligned} x - x' + p'\,(z - z') = 0,\\ y - y' + q'\,(z - z') = 0. \end{aligned}\right\} \tag{n}$$

Il considère x', y' et par suite z', r comme fonctions des deux variables indépendantes x, y déterminées par les équations précédentes, et prouve qu'elles donnent par la différentiation

$$r\frac{dr}{dx} = x - x' + p(z - z'), \tag{III}$$

$$r\frac{dr}{dy} = y - y' + q(z - z'). \tag{IV}$$

* 2[e] livraison.

† "Il y a dans l'analyse précédente un vice radical, qui échappe à toutes mes réflexions." Mém. pag. 99.

Il pose, par abréviation,

$$a' = \frac{x-x'}{z-z'}, \quad b' = \frac{y-y'}{z-z'}, \tag{a}$$

et il suppose, pour simplifier, que le rayon réfléchi par le point $x\ y\ z$ coincide avec l'axe des z; auqel cas, il prouve qu'on a

$$\begin{aligned} a'(1+p^2+q^2) + 2p(1-a'p-b'q) &= 0,\\ b'(1+p^2+q^2) + 2q(1-a'p-b'q) &= 0; \end{aligned} \tag{b}$$

et finalement il déduit, comme la condition de l'orthogonalité des surfaces développables formées par les rayons réfléchis, une équation qui peut être exprimée ainsi:

$$\text{(c)} \quad 2q(p+a')\frac{dx'}{dx} + (2b'q-1-p^2+q^2)\frac{dy'}{dx} = 2p(q+b')\frac{dy'}{dy} + (2a'p-1-q^2+p^2)\frac{dx'}{dy} : *$$

mais M. Plana ne voit pas de preuve analytique que cette équation soit vraie, excepté dans des cas particuliers.

Pour écarter cette difficulté, j'observe que les équations (n) de M. Plana combinées avec les équations définitives (a) et avec la formule $dz' = p'\,dx' + q\,dy'$, donnent

$$dz' = -(a'\,dx' + b'\,dy');$$

si l'on différentie l'équation (IV) par rapport à x, et l'équation (III) par rapport à y, on trouve en comparant

$$\begin{aligned} r\frac{d^2r}{dx\,dy} + \frac{dr}{dx}\frac{dr}{dy} - (z-z')\frac{d^2z}{dx\,dy} - pq &= a'q\frac{dx'}{dx} + (b'q-1)\frac{dy'}{dx}\\ &= b'p\frac{dy'}{dy} + (a'p-1)\frac{dx'}{dy} : \end{aligned} \tag{e}$$

d'où il suit facilement, à cause de (b), que l'équation (c) est vraie,† et qu'ainsi les surfaces développables des rayons réfléchis sont en général perpendiculaires les unes aux autres; ou, en d'autres termes, que les rayons réfléchis sont en géneral normaux à une surface, quand les rayons incidens sont normaux à une autre.

---

* Ce coefficient différentiel partiel est $\dfrac{dy'}{dx}$ dans la livraison (page 98 dernière ligne) mais évidemment par une erreur typographique.

† (c) et (e) peuvent s'écrire, à cause de (b),

$$2pq\frac{dx'}{dx} + (1-p^2+q^2)\frac{dy'}{dx} = 2pq\frac{dy'}{dy} + (1-q^2+p^2)\frac{dx'}{dy}.$$

En complétant ainsi l'analyse de M. Plana sur ce point important, j'ai cru devoir, par l'estime que je lui porte, adopter sa méthode et sa notation. La marche que je suis pour démontrer le théorème de Huyghens, sur l'existence d'une série des surfaces perpendiculaires aux rayons d'un système ordinaire homogène quelconque, est d'après l'expression fondamentale que j'ai établie pour la variation de ma *fonction caractéristique* V,* la suivante

$$\delta V = \delta \int v \, ds = \frac{\delta v}{\delta \alpha} \, \delta x + \frac{\delta v}{\delta \beta} \, \delta y + \frac{\delta v}{\delta \gamma} \, \delta z;$$

équation dans laquelle x y z sont les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque sur un rayon quelconque du système; et α β γ sont les cosinus des angles du rayon avec les demi-axes positifs de ses coordonnées; tandis que v est la vitesse corpusculaire le long du rayon, exprimée comme une fonction homogène de la première dimension des cosinus de la direction α β γ. Dans le fait, pour des systèmes ordinaires, cette formule générale se réduit à la suivante:

$$\delta V = v(\alpha \, \delta x + \beta \, \delta y + \gamma \, \delta z),$$

et elle montre que les rayons d'un pareil système sont perpendiculaires à chacune de ces surfaces pour lesquelles ma fonction V est égale à toute quantité constante. Dans la théorie ondulatoire de la lumière, les surfaces perpendiculaires sont des ondes. Quand les rayons d'un système ordinaire sont incidens sur un cristal, les rayons réfractés extraordinaires ne sont pas en général perpendiculaires aux ondes ni à aucune autre surface commune; les rayons extraordinaires ont, cependant, des surfaces perpendiculaires das une certaine classe de cas, déterminé par une équation différentielle partielle du second ordre, que j'ai pu intégrer pour les cristaux à un axe. Quelle que puisse être la disposition des rayons dans le cristal, ils deviennent de nouveau perpendiculaires aux surfaces pour lesquelles ma fonction V est constante, quand ils émergent dans un milieu ordinaire.

Observatoire de Dublin,
le 16 *août* 1833.

* Dans un des numéros suivans de la *Correspondance*, nous donnerons un aperçu des travaux analytiques de M. Hamilton sur l'optique.