

Zbl 794.52004**Erdős, Paul; Füredi, Zoltán; Pach, János; Ruzsa, Imre Z.***The grid revisited.* (In English)**Discrete Math.** **111**, No.1-3, 189-196 (1993). [0012-365X]

Diese Arbeit bezieht sich auf die Arbeit von *P. Erdős* [Ann. Math. Mon. 53, 248-250 (1946; Zbl 060.34805)]. Die originale Fragestellung wurde hier in einer verallgemeinerten Form aufgeschrieben: Sei eine Punktmenge $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ in einem metrischen Raum $M \supseteq P$ gegeben. Die Aufgabe ist die Bestimmung (oder die Abschätzung) des Maximums $f^M(n)$ des Vorkommens einer gegebenen Entfernung bzw. der kleinsten Zahl $g^M(n)$ verschiedener Entfernungen in einer Menge P , wobei $f^M(n) = \max \max_{\alpha > 0} |\{p_i, p_j\} : d(p_i, p_j) = \alpha|$ bzw. $g^M(n) = \min |\{d(p_i, p_j) : 1 \leq i < j \leq n\}|$ ist.

Die Verfasser beweisen die folgenden Sätze:

1. Wenn $d \geq 4$ und $n > 2$ sind, und P auf einer Sphäre S^{d-1} liegt, so existiert immer eine Konstante c_d , womit die folgende Abschätzung

$$g^S(n) = g(P) \leq c_d \frac{n}{\log \log n} \text{ falls } d = 4 \text{ bzw. } g^S(n) = g(P) \leq c_d n^{2/(d-2)} \text{ falls } d > 4$$

gilt.

2. Wenn n eine willkürliche natürliche Zahl ist, so existiert immer eine Konstante c , wobei eine Menge P aus n Punkten in der Ebene – in einer allgemeinen Lage – so gegeben werden kann, daß die folgende Abschätzung $g(P) \leq n 2^c \sqrt{\log n}$ gilt.

3. Zu jedem $C > 0$ gehört je eine ganze Zahl $n_0 = n_0(C)$ so, daß mindestens C_n Vektoren in der Ebene durch jede Menge P aus n Punkten (in einer allgemeinen Lage) bestimmt werden, falls $n \geq n_0$ ist.

4. Zu einer willkürlichen Zahl $\varepsilon > 0$ gehört die Zahl $C = C(\varepsilon)$ mit der folgenden Eigenschaft: Falls die Menge P der C_n Punkte auf einem Kreisbereich vom Radius n eingelagert werden kann, wobei die Entfernungen jeder beiden Punkte nicht kleiner als 1 sind, so – zu jedem Winkel $\alpha (0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ – existieren drei Punkte von P , die einen solchen Winkel bestimmen, dessen Größe sich von α höchstens mit ε unterscheidet.

I. Vermes (Budapest)

Classification:

52C10 Erdos problems and related topics of discrete geometry

Keywords:

Erdős problems