Zbl 331.04002

Erdős, Paul; Milner, E.C.; Rado, R.

Intersection theorems for systems of sets. III. (In English)

J. Aust. Math. Soc. 18, 22-40 (1974).

[Die Teile I und II (von *P. Erdős* und *R. Rado*) erschienen in J. London math. Soc. 35, 85-90 (1960; Zbl 103.27901) bzw. ibid. 44, 467-479 (1969; Zbl 172.29601).] Eine Mengenfamilie $(A_i)_{i\in I}$ heißt ein (a,b)-System, wenn $|I|=a$ und $|A_i|=b$ ist für alle $i\in I$. Eine Mengenfamilie $(A_i)_{i\in I}$ heißt Δ-System, wenn $A_\mu\cap A_\gamma=A_\rho\cap A_\sigma$ sofern $\mu,\gamma,\rho,\sigma\in I$, $\mu\neq\gamma$, $\rho\neq\sigma$; sie heißt dann auch ein $\Delta(|I|)$-System. Ist m eine Kardinalzahl, so sei m^+ die nächstgrößere. Dazu wird folgender Satz bewiesen: Es seien $m\geq\aleph_0$ und $n<m$ Kardinalzahlen. Sei $F=(A_i)_{i\in I}$ ein (m^+,m)- System mit $|A_\mu\cap A_\gamma|<n$ für alle $\mu\neq\gamma$ aus I. Dann gilt: (i) Wenn $m^n=m$ ist, dann hat F ein $\Delta(m^+)$-Teilsystem. (ii) Wenn $m^n>m$ ist und die verallgemeinerte Kontinuumhypothese gilt, dann hat F ein $\Delta(p)$-Teilsystem für jedes $p<m$. (iii) Die Aussage (ii) wird falsch, wenn $p<m$ durch $p\leq m$ ersetzt wird. Es werden ferner einige Sätze und eine Menge Hilfssätze technischen Inhalts über schwache Δ-Systeme bewiesen: $(A_i)_{i\in I}$ ist ein solches, wenn $|A_\mu\cap A_\gamma|=|A_\rho\cap A_\sigma|$ für $\mu,\gamma,\rho,\sigma\in I$, $\mu\neq\gamma$, $\rho\neq\sigma$. Zum Beispiel besagt Lemma 3: Sei $a>cf\ a$. Dann gilt: $(a,b)\nrightarrow wk\ \Delta(a)$. Dabei bedeutet $(a,b)\to wk\ \Delta(c)$, daß jedes (a,b)-System ein schwaches $\Delta(c)$-Teilsystem enthält (und $\nrightarrow$ dessen Negation).

E.Harzheim

Classification:
04A20 Combinatorial set theory
05A05 Combinatorial choice problems