Zbl 307.10020
Erdős, Paul; Sheng, T.K.
Distribution of rational points on the real line. (In English)
J. Aust. Math. Soc. 20, 124-128 (1975).

Die Anzahl der verschiedenen rationalen Zahlen p/q, $1 \leq q \leq n$, $\gamma' < p/q < \gamma''$, werde mit $N_n(\gamma', \gamma'')$ bezeichnet. Die Verff. interessieren sich für das asymptotische Verhalten von $N_n(\alpha_n, \beta_n)$ für $n \to \infty$ und für relativ kurze Intervalle (α_n, β_n). Nach *T. K. Sheng* [J. Austral. math. Soc. 15, 243-256 (1973; Zbl 267.10048)] ist für irrationales α

$$D(\alpha) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \cdot N_n\left(\alpha - \frac{1}{2n}, \alpha + \frac{1}{2n}\right) = \frac{3}{\pi^2}.$$

Für rationales $\alpha = a/q$, $(a, q) = 1$, $q > 1$ wird hier die Ungleichung

$$|D\left(\frac{a}{q}\right) - \frac{3}{\pi^2}| < \frac{2}{q}\left(1 + \frac{2}{q}\right)$$

bewiesen. Der Beweis folgt aus $D\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{2}{q} \cdot \sum_{r \leq \frac{1}{2}q}\left(1 - \frac{r}{\frac{1}{2}q}\right) \cdot \frac{\varphi(r)}{r}$. Für "längere" Intervalle wird folgendes Gleichverteilungsergebnis gezeigt: Ist (α_n, β_n) eine Folge von Intervallen mit $0 < \alpha_n < \beta_n < 1$ und $\lim_{n\to\infty} n(\beta_n - \alpha_n) = \infty$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(\alpha_n, \beta_n)}{n^2(\beta_n - \alpha_n)} = \frac{3}{\pi^2}.$$

W.Schwarz

Classification:
11A99 Elementary number theory
11J71 Distribution modulo one