Zbl 107.27002
Erdős, Pál; Rényi, Alfréd; Szüsz, Péter
On Engel's and Sylvester's series (In English)
Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolando Eötvös, Sect. Math. 1, 7-32 (1958).

Jede reelle Zahl x $(0 < x < 1)$ kann in eine Engelsche Reihe $x = 1/q_1 + 1/q_1q_2 + \cdots + 1/q_1q_2\cdots q_n + \cdots$ entwickelt werden. Dabei ist $q_{n+1}(x) = [1/r_n(x)]$, wobei die $r_n(x)$ rekursiv durch $r_0(x) = x$, $r_{n+1}(x) = r_n(x)[1/r_n(x)] - 1$ definiert sind. Die $q_n(x)$ werden als Zufallsvariable über dem Intervall $(0,1)$ aufgefaßt. Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ einer meßbaren Teilmenge A von $(0,1)$ sei durch ihr Lebesguesches Maß gegeben. Es werden u. a. die folgenden Sätze bewiesen: Satz 2: Für jedes reelle y gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\log q_n - n}{\sqrt{n}} < y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} -e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Satz 3: Für fast alle x gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n} = e.$$

Satz 4: Für fast alle x gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log q_n - n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1$$

und

$$\underline{\lim} \frac{\log q_n - n}{\sqrt{2n\log\log n}} = -1.$$

Satz 3 wurde ohne Beweis von *E. Borel* [C. R. Acad. Sci. Paris 225, 51 (1947)] angegeben. Die Sätze 2 und 4 wurden mit Beweisskizzen zuerst von *P. Lévy* (Zbl 029.15304) ausgesprochen. Im zweiten Teil der Arbeit werden Entwicklungen in Sylvestersche Reihen $x = 1/Q_1 + 1/Q_2 + \cdots + 1/Q_n + \cdots$ betrachtet. Es wird gezeigt, daß $\log(Q_n/Q_1\cdots Q_{n-1}$ asymptotisch normal verteilt ist und daß $\lim_{n\to\infty} \log(Q_n(x)/2^n)$ fast überall existiert.
Zum Schluß werden einige zahlentheoretische Fragen, die mit diesen Entwicklungen zusammenhängen, betrachtet und ungelöste Probleme erwähnt.

J.Cigler

Classification:
11K55 Metric theory of other number-theoretic algorithms and expansions

Keywords:
Engel series; Sylvester series