

Zbl 053.23801

Bagemihl, F.; Erdős, Pál; Seidel, W.

*Sur quelques propriétés frontières des fonctions holomorphes définies par certains produits dans le cercle-unité.*

*on some boundary properties of holomorphic functions defined by certain products in the unit circle. (In French)*

**Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., III. Sér. 70, 135-147 (1953). [0012-9593]**

Anknüpfend an Arbeiten verschiedener Autoren, insbesondere an *P.Fatou* [Bull. Soc. Math. France 48, 208-314 (1920)] und *N.Lusin- J.Priwaloff* [Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., III. Sér. 42, 143-191 (1925)] werden in der vorliegenden Arbeit auf einheitliche Weise teils bekannte, teils neue Ergebnisse über das Randverhalten im Einheitskreis regulärer Funktionen gewonnen. Durch direkte und elementare Methoden wird gezeigt, daß das Produkt

$$(1) \quad \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left( \frac{z}{1 - 1/n_j} \right)^{n_j} \right\}$$

bei geeigneter Wahl der positiven ganzen Zahlen  $n_j$  mit  $n_j \rightarrow \infty$ . Beispiele in  $|z| < 1$  regulärer Funktionen  $f(z)$  liefert, die die folgenden Eigenschaften aufweisen:

(1) In einem aus  $|z| < 1$  durch Entfernung abzählbar vieler, getrennt liegender Kreisscheiben entstehenden Gebiet gilt  $\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = \infty$  gleichmäßig in  $z$ .

(2) Es gilt  $\lim_{r \rightarrow 1} |f(re^{i\theta})| = \infty$  für alle  $\theta$  aus  $0 \leq \theta < 2\pi$ , ausgenommen eine Menge von  $\theta$ -Werten vom Maß 0.

(3) Es existiert eine Folge von Kreisen  $|z| = \varrho_k$ ,  $0 < \varrho_k < 1$ ,  $\varrho \rightarrow 1$ , auf denen  $|f(z)|$  gleichmäßig gegen  $\infty$  geht.

(4) Es existieren  $2^{\aleph_0}$  Spiralen in  $|z| < 1$ , die sich asymptotisch dem Einheitskreis nähern und längs denen  $\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = \infty$  gilt.

(5) Es strebt  $\max_{|z|=r} |f(z)|$  für  $r \rightarrow 1$  vorgegeben langsam gegen  $\infty$ .

(6) Es gilt  $\lim_{|z| \rightarrow 1} \{|f(z)| + |f'(z)|\} = \infty$  gleichmäßig in  $z$ .

Durch passende Modifikation des Produktes (1) werden ferner Beispiele in  $|z| < 1$  regulärer Funktion  $f(z)$  mit den folgenden Eigenschaften konstruiert:

(7) Auf einer Folge von Kreisen  $|z| = \varrho_k$ ,  $0 < \varrho_k < 1$ ,  $\varrho \rightarrow 1$  strebt  $|f(z)|$  gleichmäßig gegen  $\infty$  während  $f(z)$  nirgends einen radialen Limes hat.

(8)  $\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - z)f(z)$  ist auf fast allen Radien  $\infty$ , auf dem Radius  $\arg z = 0$  dagegen 0.

(9)  $f(z)$  ist in  $|z| < 1$  nicht beschränkt und besitzt keinen radialen Limes, strebt jedoch für  $z \rightarrow 1$  längs des Kreises  $|z + i| = \sqrt{2}$  gegen 0.

Einige der genannten Ergebnisse sind, wie die Verff. nachträglich bemerkt haben, auf ähnlichem Wege bereits von *J.Wolff* [Nederl. Akad. Wet., Proc. 31, 718-720 (1928) und Bull. Soc. Math. France 56, 167-173 (1928)] gewonnen worden.

*F.Lösch*

Classification:

30D30 General theory of meromorphic functions

©European Mathematical Society & FIZ Karlsruhe & Springer-Verlag