Zbl 030.29604

Erdős, Pál

On the integers having exactly k prime factors. (In English)

Ann. Math., Princeton, II. Ser. 49, 53-66 (1948).

Es sei $\pi_k(n)$ die Anzahl der ganzen Zahlen $a^{(k)} \leq n$, welche genau k Primfaktoren haben (mehrfache Faktoren nur einfach gezählt), sonst nennen wir die Anzahl (π'_k). Dann wird folgendes wichtige Resultat bewiesen (das das frühere Ergebnis von Pillai und dem Verf. enthält): Ist $x = [\log\log n]$ und $x - cx^{\frac{1}{2}} < k < x + cx^{\frac{1}{2}}$, so ist

$$\pi_k(n) = (1 + o(1)) \frac{n}{\log n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{1}$$

Dies gilt auch für π'_k. Daraus folgt

$$\pi_k(n) = n(1 + o(1))\sqrt{2\pi x}, \tag{2}$$

ein Resultat von Hardy bereits vermutet. Weiter gilt für die Anzahl der quadratfreien $a^{(k)}$ ebenfalls (1) noch mit $6/\pi^2$ multipliziert. Mit Hilfe von (2) und einem Resultat von Behrend wird folgender Satz hergeleitet: Ist $a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq n$ eine Folge von ganzen Zahlen, so beschaffen, daß keine die andere teilt, so ist

$$\overline{\lim} \sum \frac{1}{a_i} \frac{\sqrt{x}}{\log n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

(vgl. Zbl 012.05202). Zum Schluß bestimmt der Verf. für großes n jenes l_0, für welches $A_l = \sum 1/a^{(l)}$ maximal ist $(a^{(l)} \leq n)$. Es ist dies für J oder $J - 1$ der Fall, wo $J = [\log\log n + C](-1 < C < 0)$. Weiter ist A_i für $l < l_0$ monoton abnehmend, für $l > l_0$ monoton zunehmend.

Edmund Hlawka (Wien)

Classification:
11N25 Distribution of integers with specified multiplicative constraints
11B83 Special sequences of integers and polynomials